

Grundlagen der Elektrotechnik

I Grundbegriffe

1 Aufbau der Atome

Die Eigenschaften aller Elemente lassen sich durch den Aufbau der Atome erklären. Die Atome bestehen aus einem Kern und einer Hülle. Der Atomkern besitzt einen Durchmesser von ca. 10^{-14} m, die Ausdehnung der Atomhülle hängt von der Ordnungszahl im Periodensystem ab und beträgt einige 10^{-10} m. Im positiv geladenen Atomkern befindet sich nahezu die gesamte Masse des Atoms. Er besteht aus Neutronen und Protonen. Die Hülle ist negativ geladen und wird durch Elektronen gebildet. Im neutralen Atom sind die Anzahl der Elektronen in der Hülle und die Protonenzahl im Kern gleich. Die Elektronen in der Hülle können sich nur in bestimmten Schalen, die durch ihre Energie unterschieden sind, bewegen. In jeder Schale ist nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen maximal möglich. Die Elektronen der in der Regel nicht vollständig besetzten äußeren Schalen sind die *Valenzelektronen*. Jedes Elektron besitzt die negative *Elementarladung*

$$e_0 = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (\text{I.1})$$

Die Masse eines Elektrons ist wesentlich kleiner als die eines Protons oder Neutrons. Das Verhältnis von Elektronenmasse zu Protonenmasse ergibt sich durch

$$\frac{m_{\text{el.}}}{m_p} \approx \frac{1}{1836} \quad (\text{I.2})$$

Wird von einem Atom ein Elektron entfernt, ist der Rest positiv geladen. Dieses geladene Atom wird *Ion* genannt. Bei Entfernung eines Elektrons entsteht ein einfach positiv geladenes Ion. Wird ein Elektron hinzugefügt, liegt ein einfach negativ geladenes Ion vor.

2 Ladungsträger

Ein Stoff ist nur dann elektrisch leitfähig, wenn er bewegliche Ladungsträger besitzt. Die Ladungsträger können negativ oder positiv sein. In Metallen liegen immer negative Ladungsträger, also Elektronen vor. Hier können sich die Valenzelektronen sehr leicht vom Atom trennen, sie werden dann *freie Elektronen* genannt. Auf den festen Plätzen im Kristallgitter bleiben positive Ionen. Da sie nicht beweglich sind, liefern sie keinen Beitrag zum Ladungstransport. In Halbleitern können aber auch *Defektelektronen* oder *Löcher* als Ladungsträger vorkommen. In Gasen und Flüssigkeiten sind auch die Ionen am Ladungstransport beteiligt. Hier ist dann mit dem Ladungstransport auch ein Massentransport verbunden.

3 Spannung

Werden elektrische Ladungen getrennt, muß hierzu Arbeit verrichtet werden. Die Größe der Arbeit ist proportional zur Ladungsmenge und kann durch die Gleichung

$$W = U \cdot Q \quad (\text{I.3})$$

beschrieben werden. Die Größe U wird als Spannung bezeichnet.

$$\text{Spannung } U = \frac{W}{Q} \quad \frac{U}{V} = \frac{\frac{W}{J}}{\frac{Q}{\text{As}}} \quad (\text{I.4})$$

Die Einheit 1 J/As wird als 1 V (Volt) bezeichnet. Durch diese Spannung wird auf eine Ladung eine Kraft ausgeübt. Die Spannung ist somit Ursache für eine Bewegung von Ladungsträgern.

4 Strom

4.1 Bewegung von Ladungsträgern

Da man in der Elektrotechnik hauptsächlich metallische Leiter einsetzt, wird die Bewegung der Ladungsträger in Metallen untersucht. Die Ladungsträger führen bei Temperaturen $> 0 \text{ K}$ ständig statistisch verteilt unregelmäßige Bewegungen durch. Aus dieser Bewegung ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit.

$$\text{mittlere Geschwindigkeit } v_m = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{I.5})$$

Wird dieser statistischen Bewegung eine einseitig gerichtete Bewegung überlagert, bewegen sich alle Elektronen zusätzlich mit einer *Strömungsgeschwindigkeit* oder auch *Driftgeschwindigkeit* v_d .

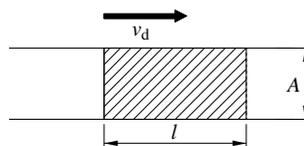


Bild I-1 Driftgeschwindigkeit

Mit dieser Bewegung ist ein Ladungstransport verbunden. An einer bestimmten Stelle des Leiters können in der Zeiteinheit Δt alle die Elektronen durch den Querschnitt fließen und somit zum Ladungstransport beitragen, deren Abstand kleiner als l ist. Im Volumen lA befinden sich $n_{\text{el}}lA$ Elektronen, wobei n_{el} die Dichte der Elektronen (Anzahl pro Volumeneinheit) ist. Da jedes Elektron die Elemen-

tarladung besitzt, ist die in diesem Volumen vorhandene Ladung ΔQ .

$$\Delta Q = n_{el} l A e_0 \tag{I.6}$$

und mit $l = v_0 \cdot \Delta t$.

$$\text{Ladung pro Volumeneinheit } \Delta Q = n_{el} A e_0 v_d \Delta t \tag{I.7}$$

Die Elektronendichte ist eine Materialkonstante und beträgt z.B. für Kupfer $n_{el} = 8,47 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3}$.

4.2 Stromstärke

Die Ladungsmenge ΔQ , die pro Zeiteinheit Δt durch einen Leiterquerschnitt tritt, ist die *Stromstärke I*.

$$\text{Stromstärke } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \frac{I}{A} \left| \frac{\Delta Q}{As} \right| \frac{\Delta t}{s} \tag{I.8}$$

$$I = n_{el} A e_0 v_d \tag{I.9}$$

Im Internationalen Einheitensystem (SI-System) ist die Stromstärke als Basisgröße durch die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern definiert:

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.

■ **Beispiel:** Ein Kupferleiter von $A = 1,5 \text{ mm}^2$ wird von einem Strom $I = 15 \text{ A}$ durchflossen. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen?

$$v_d = \frac{I}{n_{el} A e_0} = \frac{15 \text{ A}}{8,47 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3} \cdot 1,5 \text{ mm}^2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 0,74 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Diese Driftgeschwindigkeit ist relativ gering. Dagegen breitet sich ein elektrisches Signal mit Lichtgeschwindigkeit aus.

4.3 Stromdichte

In der Technik wichtig für die Belastbarkeit von Leitungen ist die *Stromdichte S*, also die auf den Querschnitt bezogene Stromstärke.

$$\text{Stromdichte } S = \frac{I}{A} \quad \frac{S}{\frac{A}{\text{mm}^2}} \left| \frac{I}{A} \right| \frac{A}{\text{mm}^2} \tag{I.10}$$

Da die Querschnittsfläche in der Regel in mm^2 angegeben wird, ist die in der Technik gebräuchliche

$$\text{Einheit der Stromdichte } [S] = 1 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

5 Das Ohmsche Gesetz

Wird an einen Leiter in einem geschlossenen Stromkreis eine Spannung U angelegt, fließt in dem Leiter ein Strom I . Strom und Spannung sind einander proportional. Die Abhängigkeit läßt sich beschreiben durch:

$$\text{Ohmsches Gesetz } U = R \cdot I \tag{I.11}$$

Die materialabhängige Größe R bezeichnet man als *elektrischen*

$$\text{Widerstand } R = \frac{U}{I} \quad \frac{R}{\Omega} \left| \frac{U}{V} \right| \frac{I}{A} \tag{I.12}$$

Die Einheit ist $1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$.

Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes ist der Leitwert.

$$\text{Leitwert } G = \frac{1}{R} \quad \frac{G}{S} \left| \frac{R}{\Omega} \right| \tag{I.13}$$

Seine Einheit ist $1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S}$.

6 Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit

Der elektrische Widerstand eines metallischen Leiters hängt vom Material, der Länge l und dem Querschnitt A ab. Er wird dadurch verursacht, daß die Ladungsträger im Leiter durch Stöße mit den auf festen Plätzen sitzenden Ionen in ihrer Bewegung gehemmt werden.

$$\text{Widerstand eines Drahtes } R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A} \tag{I.14}$$

Die Größe ρ ist der spezifische Widerstand.

spezifischer Widerstand

$$\rho = \frac{RA}{l} \quad \frac{\rho}{\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}} \left| \frac{R}{\Omega} \right| \frac{A}{\text{mm}^2} \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \tag{I.15}$$

Die Einheit von ρ kann ungerechnet werden in

$$[\rho] = 1 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{ m} \tag{I.16}$$

Analog zum Leitwert ist der Kehrwert des spezifischen Widerstandes die *Leitfähigkeit κ*

$$\text{Leitfähigkeit } \kappa = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\kappa}{\frac{1}{\Omega \text{ m}}} \left| \frac{\rho}{\Omega \text{ m}} \right| \tag{I.17}$$

In Tabelle I-1 sind Zahlenwerte des spezifischen Widerstandes und der Leitfähigkeit aufgeführt. Der Wert für Kupfer kann je nach Reinheit schwanken. Der hier angegebene Wert ist der internationale Standardwert.

Tabelle I-1 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

Leiterwerkstoff	$\rho/\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$	$\kappa/\text{S/m}$
Silber	0,0163	$61 \cdot 10^6$
Kupfer	0,0173	$58 \cdot 10^6$
Aluminium	0,0263	$38 \cdot 10^6$
Messing	0,0752	$13,3 \cdot 10^6$
Manganin	0,435	$2,3 \cdot 10^6$

- **Beispiel:** Der Widerstand eines Kupferdrahtes der Länge 160 m bei einem Querschnitt von 1,5 mm² soll berechnet werden.

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{0,0173 \Omega \text{ mm}^2 \cdot 160 \text{ m}}{\text{m} \cdot 1,5 \text{ mm}^2} = 1,845 \Omega$$

- **Beispiel:** Aus Manganindraht von A = 1 mm² soll ein Widerstand von 60 Ω gewickelt werden. Wie lang muß der Draht sein?

$$l = RA\alpha = 60 \Omega \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 138 \text{ m}$$

7 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen

Die elektrische Leitung in Festkörpern ist mit der Bewegung von Ladungsträgern verbunden. Diese stoßen mit den auf festen Plätzen sitzenden Atomen oder Ionen zusammen. Die Schwingung der Atome und Ionen um ihren Platz ist temperaturabhängig. Deshalb ist auch der elektrische Widerstand temperaturabhängig. Bei höheren Temperaturen ist die freie Weglänge und die Beweglichkeit der Ladungsträger kleiner und somit der Widerstand größer. In Metallen ist die Anzahl der freien Ladungsträger temperaturunabhängig, in Halbleitern nicht. Daher haben Metalle und Halbleiter unterschiedliche Temperaturabhängigkeiten.

Der spezifische elektrische Widerstand von Metallen und damit auch der Widerstand steigt mit zunehmender Temperatur. Im Temperaturbereich von ca. 200 K bis 400 K läßt sich diese Abhängigkeit bei Metallen in linearer Näherung durch eine Gerade darstellen.

Tabelle I-2 Temperaturkoeffizient α_{20}

Leiterwerkstoff	$\alpha_{20}/\text{K}^{-1}$
Silber	$3,7 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	$3,7 \cdot 10^{-3}$
Messing	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Manganin	$0,01 \cdot 10^{-3}$

lineare Näherung $R_{\vartheta} = R_{\vartheta_0} [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)]$ (I.18)

Dabei ist R_{ϑ} der Widerstand bei der Temperatur ϑ und R_{ϑ_0} der Widerstand bei der Bezugstemperatur ϑ_0 . Die Größe α ist der *Temperaturkoeffizient*. Da Gleichung (I.18) eine Näherung ist, hängt der Wert für α von der Bezugstemperatur ab. Als Bezugstemperatur wird meistens 20 °C genommen.

■ **Beispiel:** Bei 10 °C ist der Widerstand eines Kupferdrahtes 200 Ω. Wie groß ist er bei 100 °C?
Zunächst muß der Widerstand R_{ϑ_0} bestimmt werden.

$$R_{\vartheta_0} = \frac{R_{\vartheta}}{1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ)} = \frac{200 \Omega}{1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} (10 - 20) \text{ K}} = 208,1 \Omega$$

Dann kann hiermit R_{ϑ} berechnet werden.

$$R_{\vartheta} = R_{\vartheta_0} [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)] = 208,1 \Omega [1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (100 - 20)] = 273 \Omega$$

Die lineare Näherung ist recht grob. Genauer kann die Temperaturabhängigkeit durch eine quadratische Näherung angepaßt werden.

Quadratische Näherung

$$R_{\vartheta} = R_0 (1 + A(\vartheta - \vartheta_0) + B(\vartheta - \vartheta_0)^2) \quad (\text{I.19})$$

A und B sind Materialkonstanten. Als Bezugstemperatur wird $\vartheta_0 = 0 \text{ °C}$ angenommen. R_0 ist dann der Widerstand bei 0 °C. Ein oft benutzter Metallwiderstand zur Temperaturmessung ist der Platinwiderstand Pt100, der 100 Ω bei 0 °C hat. Für Pt sind die Konstanten $A = 3,90802 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $B = -0,5802 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$.

Bei Halbleitern fällt der spezifische Widerstand mit steigender Temperatur zunächst, da hier mehr Ladungsträger frei gesetzt werden. Anschließend steigt der Widerstand wie bei Metallen, da die Beweglichkeit verringert wird. Supraleiter zeigen unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der Sprungtemperatur T_c , überhaupt keinen meßbaren Widerstand mehr. Werkstoffe, bei denen der Widerstand mit steigender Temperatur zunimmt, haben einen *positiven Temperaturkoeffizienten* (PTC). Nimmt der Widerstand ab, besitzen sie einen *negativen Temperaturkoeffizienten* (NTC).

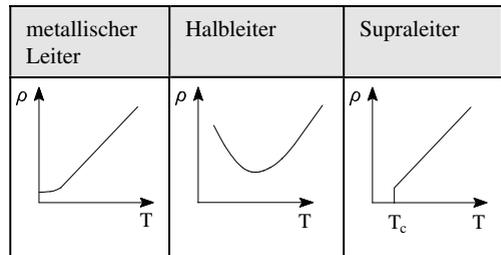


Bild I-2 Prinzipieller Verlauf des spezifischen Widerstandes

II Der Gleichstromkreis

1 Zählfeilsysteme

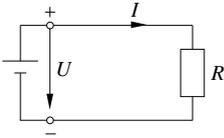


Bild II-1
Zählfeilsystem

Damit in einem Leiter ein elektrischer Strom fließen kann, muß ein geschlossener Stromkreis vorliegen. In elektrischen Schaltungen werden die Spannungs- und Stromrichtungen allgemein durch Pfeile gekennzeichnet. Die Richtung der Spannung wird in Schaltbildern durch einen Pfeil dargestellt, der von + nach – verläuft. Die Stromrichtung wird ebenfalls durch einen Pfeil angegeben, der beim Verbraucher von + nach – gezeichnet wird. Diese Stromrichtung wird als *technische Stromrichtung* bezeichnet; die tatsächliche Bewegung der Elektronen ist dieser Richtung entgegengesetzt. In der linken Seite von Bild II-1 sind Spannungs- und Strompfeil entgegengesetzt, man spricht hier vom *Erzeuger-Zählfeilsystem*. Auf der Verbraucherseite sind Spannungs- und Strompfeil gleichgerichtet; hier liegt das *Verbraucher-Zählfeilsystem* vor. In den meisten Fällen wird die Pfeilzuordnung im Verbraucher-Zählfeilsystem vorgenommen.

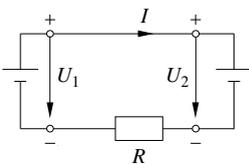


Bild II-2
Schaltung

Liegt nun eine Schaltung nach Bild II-2 vor, so hängt die tatsächliche Stromrichtung von der Höhe der Spannungen U_1 und U_2 ab. In diesem Fall gibt man für den Strom willkürlich eine Richtung vor und bezeichnet diese als Bezugsrichtung oder Zählrichtung. Fließt der technische Strom tatsächlich in der willkürlich gewählten Richtung, wird er positiv gezählt, im anderen Fall negativ.

2 Kirchhoffsche Gesetze

Eine elektrische Schaltung besteht in der Regel aus mehreren Spannungsquellen und Widerständen, die sehr unterschiedlich miteinander verbunden sein können. Das gesamte System wird auch als *Netzwerk* bezeichnet. Für die Berechnung von Strömen und Spannungen in einem solchen Netzwerk sind die beiden *Kirchhoffschen Gesetze*, die auch als *Knotenregel* und *Maschenregel* bezeichnet werden, von großer Bedeutung.

2.1 Knotenregel

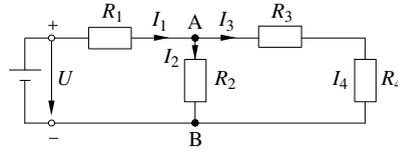


Bild II-3 Knotenregel

Knotenpunkte sind Punkte, an denen sich der Stromkreis verzweigt. Das *1. Kirchhoffsche Gesetz* bezieht sich auf diese Punkte, z.B. im Bild II-3 auf die Punkte A und B. In diesen Knotenpunkten muß die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein. Im Punkt A gilt

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{II.1}$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{II.2}$$

Werden alle in einen Knoten hineinfließenden Ströme mit positivem, alle abfließenden Ströme mit negativem Vorzeichen versehen, läßt sich die Knotenregel aufstellen.

$$\text{Knotenregel} \quad \sum_{k=1}^n I_k = 0 \tag{II.3}$$

Diese Regel wird auch das *1. Kirchhoffsche Gesetz* genannt.

2.2 Maschenregel

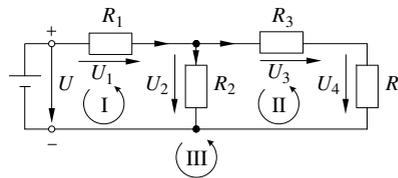


Bild II-4 Maschenregel

Das *2. Kirchhoffsche Gesetz* bezieht sich auf *Maschen* von Netzwerken. Maschen sind geschlossene Teile von Netzwerken. In der Schaltung nach Bild II-4 gibt es drei Maschen. Masche I wird durch die Spannungsquelle, R_1 und R_2 gebildet, Masche II durch R_3 , R_4 und R_2 und Masche III durch die Spannungsquelle, R_1 , R_3 und R_4 . Die *Maschenregel* ist eine Gleichung für die Spannungen innerhalb einer Masche. Bei einem frei wählbaren Umlaufsinn, hier gegen den Uhrzeigersinn, werden die Spannungen, die dem Umlaufpfeil entgegen gerichtet sind, negativ gezählt. Die Richtungen der Spannungspfeile an den Spannungsquellen ist von + nach –, an den einzelnen Widerständen werden die Spannungspfeile in den entsprechenden Stromrichtungen gezeichnet.

In der dargestellten Schaltung lassen sich z.B. folgende Maschenregeln aufstellen:

$$I) U - U_2 - U_1 = 0 \quad (II.4)$$

$$II) U_2 - U_4 - U_3 = 0 \quad (II.5)$$

$$III) U - U_4 - U_3 - U_1 = 0 \quad (II.6)$$

Innerhalb einer Masche gilt immer – unter Berücksichtigung der Vorzeichen – die Maschenregel.

$$\text{Maschenregel} \quad \sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (II.7)$$

3 Schaltung von Widerständen

Für die Kombination von Widerständen gibt es im Prinzip zwei Möglichkeiten, *Reihen-* oder *Serienschaltung* und *Parallelschaltung*.

3.1 Reihenschaltung

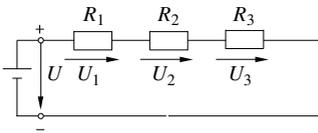


Bild II-5 Reihenschaltung

In einer Reihenschaltung fließt durch jeden Widerstand derselbe Strom I . Für die Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen gilt nach dem Ohmschen Gesetz $U_k = I \cdot R_k$. Mit Gleichung (II.7) gilt somit

$$U - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 = 0 \quad (II.8)$$

$$U = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = I \cdot R_{\text{ges}} \quad (II.9)$$

$$\text{Reihen-Ersatzwiderstand} \quad R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (II.10)$$

Weiterhin folgt für die Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3 \quad (II.11)$$

Hieraus resultiert die *Spannungsteilerregel*. Sie besagt, daß sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung verhalten, wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand.

$$\text{Spannungsteiler} \quad \frac{U_k}{U} = \frac{R_k}{R_{\text{ges}}} \quad (II.12)$$

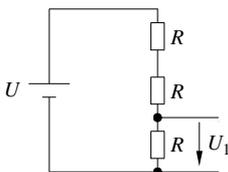


Bild II-6 Beispiel Spannungsteiler

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-6 soll die Teilspannung U_1 berechnet werden. Die Spannung U ist 300 V.

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}; \quad U_1 = 100 \text{ V}$$

3.2 Parallelschaltung

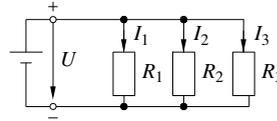


Bild II-7 Parallelschaltung

In einer Parallelschaltung von Widerständen liegt an jedem Widerstand die gleiche Spannung U . Somit gilt mit

$$I_k = \frac{U}{R_k} \quad \text{und} \quad (II.3); \quad \frac{U}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_k}$$

$$\text{Parallel-Ersatzwiderstand} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (II.13)$$

Der gesamte Leitwert errechnet sich als Summe der einzelnen Leitwerte.

$$\text{Leitwert} \quad G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (II.14)$$

Oft besteht eine Parallelschaltung nur aus zwei Widerständen. Dann errechnet sich der Ersatzwiderstand aus

$$\text{Parallelwiderstand} \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (II.15)$$

■ **Beispiel:** Berechnung des Ersatzwiderstandes der Schaltung nach Bild II-8.

Die Widerstände werden zu Gruppen zusammengefaßt.

$$R_i = \frac{150 \Omega \cdot 250 \Omega}{150 \Omega + 250 \Omega} = 93,75 \Omega; \quad \frac{1}{R_{II}} = \frac{1}{120 \Omega} + \frac{1}{240 \Omega} + \frac{1}{360 \Omega}$$

$$R_{II} = 65,45 \Omega \quad R = (100 + 93,75 + 65,45) \Omega = 259,2 \Omega$$

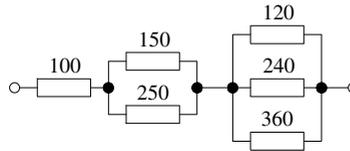


Bild II-8 Beispiel Ersatzwiderstand

3.3 Stern-Dreieck Umwandlung

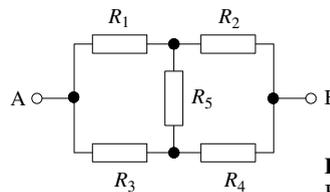


Bild II-9 Brückenschaltung

Nicht immer lassen sich Widerstände zu Gruppen zusammenfassen. Als Beispiel wird die Schaltung nach Bild II-9 betrachtet. Zu einer Lösung gelangt man, wenn eine *Stern-Dreieckumwandlung* oder eine *Dreieck-Sternumwandlung* durchgeführt wird. Hierunter versteht man eine rechnerische Umwandlung einer Schaltung in eine elektrisch gleichwertige Schaltung. Die Schaltungen sind dann gleichwertig, wenn zwischen entsprechenden Punkten in den beiden Schaltungen gleiche Widerstände oder Leitwerte vorhanden sind. Wenn zwischen den Punkten 1 und 2 im Stern und im Dreieck derselbe Widerstand liegen soll, muß gelten:

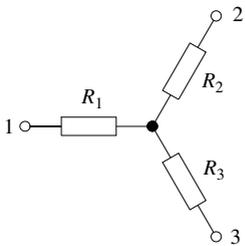
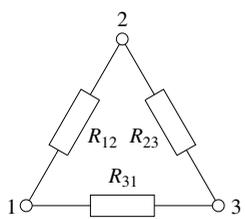
$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.16})$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.17})$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.18})$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich Bestimmungsgleichungen für die Umwandlungen ableiten. Sie lauten

Tabelle II-1 Dreieck-Stern- und Stern-Dreieck-Umwandlung

Dreieck in Stern	Stern in Dreieck
$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.19})$	$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (\text{II.22})$
$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.20})$	$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \quad (\text{II.23})$
$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.21})$	$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (\text{II.24})$
 <p>Bild II-10 Stern</p>	 <p>Bild II-11 Dreieck</p>

■ **Beispiel:** In der Schaltung Bild II-9 soll der Gesamt Widerstand zwischen den Punkten A und B berechnet werden. $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 25 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 15 \Omega$.

Das Dreieck aus R_1 , R_3 und R_5 wird in einen Stern umgerechnet.

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{10 \cdot 25}{10 + 25 + 15} \Omega = 5 \Omega ;$$

$$R_C = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 25 + 15} \Omega = 3 \Omega$$

$$R_D = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{25 \cdot 15}{10 + 25 + 15} \Omega = 7,5 \Omega$$

Die Ersatzschaltung ergibt dann die in Bild II-9 dargestellte Schaltung. Der Gesamt Widerstand berechnet sich aus

$$R_{AB} = \left(5 + \frac{18 \cdot 12,5}{18 + 12,5} \right) \Omega = 12,38 \Omega \quad (\text{II.19})$$

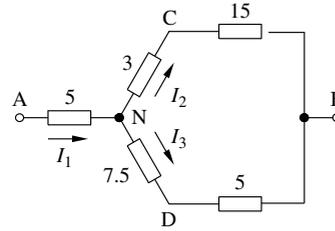


Bild II-12 Beispiel Stern-Dreieck-Umwandlung

3.4 Meßbereichserweiterung

Durch geeignet gewählte Widerstände lassen sich die Meßbereiche von Strom- und Spannungsgeräten anpassen. R_M ist jeweils der Innenwiderstand des verwendeten Meßgerätes.

3.4.1 Voltmeter

Um den Meßbereich eines Voltmeters zu erweitern, ist nach Bild II-13 ein Vorwiderstand zu schalten.

Wenn mit U_1 der neu einzustellende Meßbereich und mit U_M der vorhandene Meßbereich des Gerätes bezeichnet wird, kann mit Hilfe der Maschenregel der erforderliche Vorwiderstand berechnet werden.

$$U_1 = U_M + U_V \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{U_1}{U_M} = 1 + \frac{U_V}{U_M} = 1 + \frac{R_V}{R_M} \quad (\text{II.21})$$

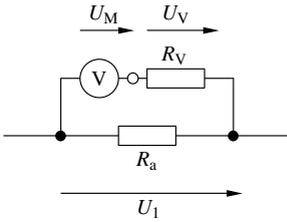


Bild II-13 Erweiterung des Spannungs-Meßbereichs

$$\text{Meßbereichsverhältnis } n = \frac{U_1}{U_M} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{Vorwiderstand } R_V = R_M(n-1) \quad (\text{II.23})$$

3.4.2 Amperemeter

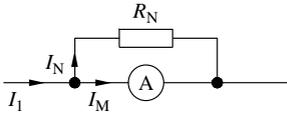


Bild II-14 Erweiterung des Strom-Meßbereichs

Für die Meßbereichserweiterung eines Strommeßgerätes nach Bild II-14 wird ein Widerstand parallel zum Meßgerät geschaltet. Um die Größe dieses Nebenwiderstandes zu berechnen, muß man von der Knotenregel ausgehen.

$$I_1 = I_M + I_N \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{I_1}{I_M} = 1 + \frac{I_N}{I_M} = 1 + \frac{R_M}{R_N} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Meßbereichsverhältnis } n = \frac{I_1}{I_M} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Nebenwiderstand } R_N = \frac{R_M}{n-1} \quad (\text{II.27})$$

I_1 ist der zu messende Strom, also der neue Meßbereich, I_M der vorhandene Meßbereich.

■ **Beispiel:** Ein Strommeßgerät mit einem Innenwiderstand von $0,45 \Omega$, welches den Skalenendwert von 2 A hat, soll für einen Verbraucherstrom von 20 A eingesetzt werden.

- a) Welcher Nebenwiderstand ist zu schalten?
- b) Welche Stellung nimmt der Zeiger an, wenn statt des unter a) errechneten Nebenwiderstandes ein Widerstand von $0,025 \Omega$ genommen wird.

a) $n = \frac{20 \text{ A}}{2 \text{ A}} = 10$; $R_N = \frac{0,45 \Omega}{9} = 0,05 \Omega$

b) $n = 1 + \frac{R_M}{R_N} = 1 + \frac{0,45 \Omega}{0,025 \Omega} = 19$; $I_1 = 19 \cdot 2 \text{ A} = 38 \text{ A}$

$\frac{20 \text{ A}}{38 \text{ A}} \cdot 100\% = 52,6\%$ des Skalenendwertes

4 Reale Spannungsquelle

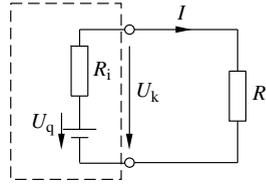


Bild II-15 Reale Spannungsquelle

Wird eine reale Spannungsquelle durch einen Widerstand belastet, sinkt die zwischen den Polen (Klemmen) vorhandene Spannung U_K , die als *Klemmspannung* bezeichnet wird. Ursache hierfür ist der immer vorhandene *innere Widerstand* einer Spannungsquelle. Die Spannung U_q wird als *Quellspannung* oder *Leerlaufspannung* bezeichnet. Im Ersatzschaltbild Bild II-15 läßt sich ablesen

$$IR_i + IR_a - U_q = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$U_K = IR_a \quad (\text{II.29})$$

$$\text{Klemmspannung } U_K = U_q - IR_i \quad (\text{II.30})$$

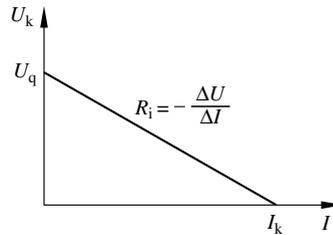


Bild II-16 Kennlinie einer Spannungsquelle

Sind R_i und U_q unabhängig vom Belastungsstrom, liegt eine *lineare Quelle* vor, deren Kennlinie in Bild II-16 dargestellt ist. Wenn $I = 0$ ist, folgt aus Gleichung (II.30) $U_K = U_q$. Ist dagegen der Widerstand $R_a = 0$ (Quelle kurzgeschlossen), nimmt der Strom seinen Maximalwert an.

$$\text{Kurzschlußstrom } I_K = \frac{U_0}{R_i} \quad (\text{II.31})$$

Aus der Kennlinie läßt sich auch der Innenwiderstand R_i bestimmen.

$$\text{Innenwiderstand } R_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (\text{II.32})$$

Eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand $R_i = 0$ wird als *ideale Spannungsquelle* oder *Konstantspannungsquelle* bezeichnet.

4.1 Kombination von Spannungsquellen

Spannungsquellen können in Reihe oder parallel geschaltet werden. Von Interesse ist auch hier der resultierende Innenwiderstand und die Quellspannung der gesamten Anordnung.

4.1.1 Reihenschaltung

Die Kombination kann durch eine einzelne Quelle ersetzt werden, die durch *Quellspannung* und *Innenwiderstand* charakterisiert wird. Um diese Größen zu berechnen, nimmt man zunächst an, daß die Quelle nicht belastet ist. Die Klemmspannung ist dann gleich der Quellspannung.

$$\text{Quellspannung } U_q = U_1 + U_2 \quad (\text{II.33})$$

$$\text{Kurzschlußstrom } I_k = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_q}{R_i} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Innenwiderstand } R_i = R_1 + R_2 \quad (\text{II.35})$$

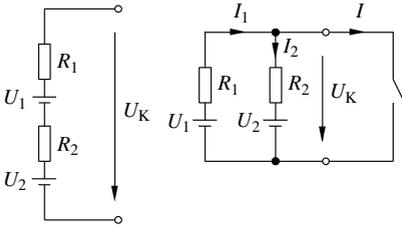


Bild II-17 Kombination von Spannungsquellen

4.1.2 Parallelschaltung

Um die Quellspannung und den Innenwiderstand zu bestimmen, wird zunächst die Quelle nicht belastet. ($U_K = U_q$)

$$\text{Ausgleichsstrom } I_1 = I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.36})$$

$$\text{Quellspannung } U_q = U_2 + I_2 R_2 \quad (\text{II.37})$$

$$U_q = U_2 + R_2 \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.38})$$

$$U_q = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.39})$$

Aus dem Kurzschlußstrom ($I = I_K$) läßt sich der Innenwiderstand berechnen.

$$\text{Knoten } I_1 = I_2 + I_K \quad (\text{II.40})$$

$$\text{rechte Masche } I_2 R_2 + U_2 = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\text{linke Masche } I_1 R_1 + I_2 R_2 + U_2 - U_1 = 0 \quad (\text{II.42})$$

$$\text{Kurzschlußstrom } I_K = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \quad (\text{II.43})$$

$$I_K = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad (\text{II.44})$$

$$\text{Innenwiderstand } R_i = \frac{U_q}{I_K} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.45})$$

$$R_i = R_1 \text{ parallel } R_2 \quad (\text{II.46})$$

5 Ersatzstromquelle

Jede Quelle kann auch entsprechend Bild II-18 durch eine Ersatzstromquelle mit einem Quellstrom I_q und einem parallel dazu liegenden Innenwiderstand betrachtet werden. Es gelten die Beziehungen

$$\text{Kurzschluß } I = I_q \quad (\text{II.47})$$

$$U = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$I_i = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$\text{Leerlauf } I_i = I_q \quad (\text{II.50})$$

$$I = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$U = I_q R_i \quad (\text{II.52})$$

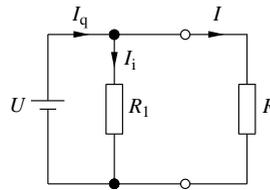


Bild II-18
Ersatzstromquelle

Im folgenden Beispiel Bild II-19 soll der aktive Zweipol einmal durch eine Ersatzspannungsquelle und einmal durch eine Ersatzstromquelle dargestellt werden.

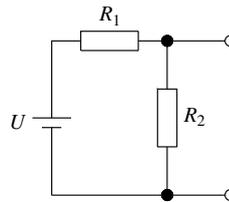


Bild II-19
Beispiel Ersatzquelle

$$\text{Ersatzspannungsquelle } U_q = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.53})$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.54})$$

$$I_K = \frac{U}{R_1} \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Ersatzstromquelle } I_q = \frac{U}{R_1} = I_K \quad (\text{II.56})$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.57})$$

6 Netzwerkberechnung

Die Berechnung von Strömen, Spannungen oder Leistungen in einer beliebigen elektrischen Schaltung bezeichnet man als *Netzwerkberechnung*. Zur Berechnung der Ströme und Spannungen kann man im Prinzip immer Knoten- und Maschenregeln anwen-

den. Dies kann allerdings in komplizierten Netzwerken zu einer großen Zahl von Unbekannten und damit Gleichungen führen. Hier führen manchmal andere Verfahren schneller zum Ziel.

6.1 Gemischte Schaltungen

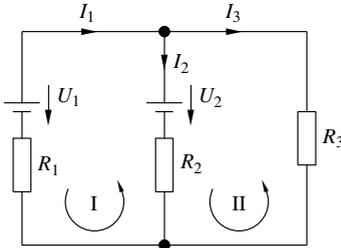


Bild II-20 Beispiel Netzwerk

Zunächst soll an Hand eines Beispiels die Berechnung mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze erfolgen. Die Spannungspfeile werden von + nach - gezeichnet. Die Strompfeile werden willkürlich angenommen. Sollte für einen der Ströme ein negativer Wert berechnet werden, ist der Pfeil falsch gewählt worden. Die Werte in der Schaltung Bild II-20 sind: $U_1 = 20 \text{ V}$, $U_2 = 30 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$.

Knotenregel $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

Masche I $U_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - U_2 = 0$;

Masche II $U_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$

Mit Zahlenwerten und nach Umstellung

Knotenregel $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

Masche I $100 \Omega \cdot I_1 + 100 \Omega \cdot I_2 = -10 \text{ V}$;

Masche II $100 \Omega \cdot I_2 - 50 \Omega \cdot I_3 = -30 \text{ V}$

Durch Einsetzen kann dieses Gleichungssystem gelöst werden.

$I_1 = 75 \text{ mA}$; $I_2 = -175 \text{ mA}$; $I_3 = 250 \text{ mA}$

Aus dem negativen Wert für I_2 ist zu erkennen, daß die tatsächliche Stromrichtung der eingezeichneten Pfeilrichtung entgegengesetzt ist.

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-9 soll der Strom durch den Widerstand R_3 berechnet werden. Die angelegte Spannung ist 100 V .

Ausgehend vom Ergebnis in Gleichung (II.19) ist der Gesamtstrom

$I_{\text{ges}} = \frac{100 \text{ V}}{12,38 \Omega} = 8,08 \text{ A}$; $U_{AN} = 8,08 \text{ A} \cdot 5 \Omega = 40,4 \text{ V}$;

$U_{NB} = 100 \text{ V} - 40,4 \text{ V} = 59,6 \text{ V}$

$I_2 = \frac{59,6 \text{ V}}{18 \Omega} = 3,31 \text{ A}$; $I_3 = \frac{59,6 \text{ V}}{12,5 \Omega} = 4,77 \text{ A}$

Die Spannung über R_3 ist gleich der Spannung zwischen den Punkten C und D in Bild II-12:

$U_{CD} = 4,77 \text{ A} \cdot 7,5 \Omega - 3,31 \text{ A} \cdot 3 \Omega = 25,85 \text{ V}$.

6.2 Überlagerungsverfahren

Ein weiteres Verfahren ist die Berechnung mit Hilfe des *Helmholtz'schen Überlagerungsverfahrens*. Bei der Berechnung von Zweigströmen in einem Netzwerk mit mehreren Spannungsquellen werden zunächst alle Spannungsquellen bis auf eine kurzgeschlossen. Für diesen Fall werden die Teilströme berechnet. Dann wird dasselbe Verfahren für eine weitere Spannungsquelle durchgeführt und wieder die Teilströme berechnet. Der gesamte Zweigstrom ergibt sich als Summe der Teilströme.

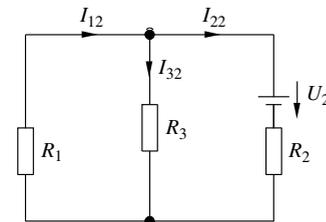
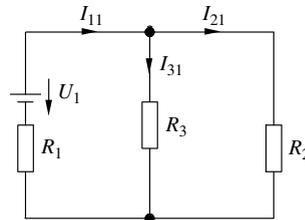
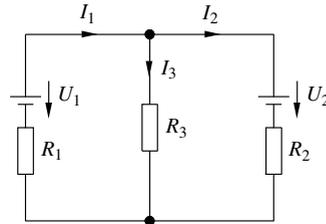


Bild II-21a, b, c Überlagerungsverfahren

Das Verfahren soll an Hand der Schaltung in Bild II-21a dargestellt werden. Zunächst werden alle Spannungen bis auf U_1 kurzgeschlossen. Es entsteht die Ersatzschaltung nach Bild II-21b. Der Teilstrom I_{11} errechnet sich zu

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = U_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.58})$$

Werden im nächsten Schritt alle Spannungen bis auf U_2 kurzgeschlossen, entsteht die Ersatzschaltung Bild II-21c. Jetzt läßt sich der Teilstrom I_{22} berechnen.

$$I_{22} = U_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.59})$$

und daraus weiter:

$$I_{12} = U_2 \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.60})$$

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (\text{II.61})$$

Haben die Spannungsquellen einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand, darf dieser nicht kurzgeschlossen werden.

6.3 Ersatzspannungsquelle

Oft ist in Netzwerken nur nach einer Teilspannung oder einem Teilstrom gefragt. In diesem Fall läßt sich die Methode der Ersatzspannungsquelle anwenden. Als Beispiel wird die in Bild II-22 dargestellte Brückenschaltung mit einer Last R_5 betrachtet. In der Meßtechnik interessiert als Meßgröße die Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B bei einer Belastung durch ein Meßgerät.

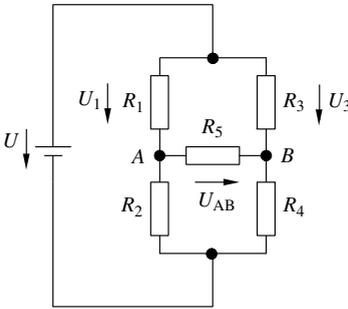


Bild II-22
Brücke

Bei nicht belasteter Brücke besteht zwischen den Punkten A und B die Spannung U_{AB0} . Diese Spannung wird als Quellspannung einer Ersatzspannungsquelle gesehen.

$$U_{AB0} = U_3 - U_1 \quad (\text{II.62})$$

$$U_{AB0} = U \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (\text{II.63})$$

Die Spannung U_{AB} ist dann als Klemmspannung einer Spannungsquelle mit der Quellspannung U_{AB0} anzusehen. Der Innenwiderstand dieser Ersatzspannungsquelle ist durch die Brückenwiderstände festgelegt. Er wird dadurch bestimmt, daß die äußere Spannungsquelle U kurzgeschlossen wird.

$$\text{Innenwiderstand } R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (\text{II.64})$$

$$\text{Brückenspannung } U_{AB} = U_{AB0} \frac{R_5}{R_i + R_5} \quad (\text{II.65})$$

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-22 gelten folgende Werte:

$$R_1, R_3, R_4 = 100 \Omega, R_2 = 200 \Omega, R_5 = 1 \text{ k} \Omega, U = 10 \text{ V}.$$

Wie groß ist die Spannung U_{AB} ?

$$U_{AB0} = 10 \text{ V} \left(\frac{100}{200} - \frac{100}{300} \right) = 1,67 \text{ V};$$

$$R_i = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} \Omega + \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} \Omega = 116,67 \Omega$$

$$U_{AB} = 1,67 \text{ V} \frac{1000}{116,67 + 1000} = 1,49 \text{ V}$$

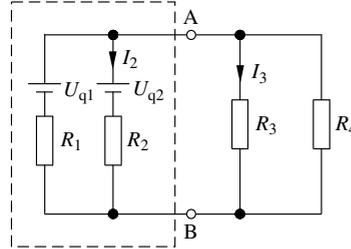


Bild II-23 Beispiel Methode der Ersatzspannungsquelle

■ **Beispiel:** Berechnung des Stromes I_3 durch den Widerstand R_3 (Bild II-23).

$$U_{q1} = 6 \text{ V}, \quad U_{q2} = 4 \text{ V}, \quad R_1 = 0,5 \Omega,$$

$$R_2 = 0,8 \Omega, \quad R_3 = R_4 = 6 \Omega$$

Die im gestrichelten Rechteck liegenden Bauteile werden zu einer Ersatzspannungsquelle zusammengefaßt. Die Quellspannung kann aus dem unbelasteten Fall bestimmt werden.

$$I_2 = \frac{U_{q1} - U_{q2}}{R_1 + R_2} = \frac{6 \text{ V} - 4 \text{ V}}{0,5 \Omega + 0,8 \Omega} = 1,54 \text{ A};$$

$$U_q = U_{q2} + I_2 R_2 = 4 \text{ V} + 1,54 \text{ A} \cdot 0,8 \Omega = 1,23 \text{ V}$$

$$R_i = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,8 + 0,5} \Omega = 0,307 \Omega$$

Die Klemmspannung sinkt bei Belastung mit

$$R_a = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 3 \Omega \quad \text{auf}$$

$$U_{AB} = U_q \frac{R_a}{R_a + R_i} = 1,23 \text{ V} \frac{3 \Omega}{3 \Omega + 0,307 \Omega} = 1,11 \text{ V};$$

$$I_3 = \frac{1,11 \text{ V}}{3 \Omega} = 0,37 \text{ A}$$

6.4 Nichtlineare Gleichstromkreise

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Widerstände in den Netzwerken nicht stromabhängig sind. Derartige Netzwerke werden als *lineare Netzwerke* bezeichnet. Ist der Widerstand eines Bauteils stromabhängig, wird diese Abhängigkeit normalerweise durch eine Kennlinie dargestellt. Die Bestimmung von Spannungen und Strömen im Kreis erfolgt meistens grafisch. Zur Erläuterung wird die Schaltung nach Bild II-24 betrachtet. In Bild II-25 sind auf der Ordinate der Strom und auf der Abszisse die Spannung U_D an der Diode aufgetragen. Die Kennlinie der Diode ist als Kurve 1 eingetragen. Weiter ist als Gerade 2 die Kennlinie des Ohmschen Widerstandes eingetragen. Diese Gerade errechnet sich durch

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U - U_D}{R} \quad (\text{II.66})$$

Da durch Widerstand und Diode der gleiche Strom fließt, stellt sich als *Arbeitspunkt A* der Schnittpunkt beider Kennlinien ein. Es fließt der Strom I_A und an der Diode liegt die Spannung U_{DA} .

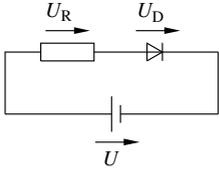


Bild II-24
Nichtlineare Kreise

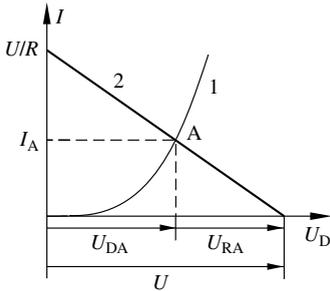


Bild II-25 Bestimmung des Arbeitspunktes

■ **Beispiel:** Die Diode in der Schaltung nach Bild II-24 hat eine Kennlinie gemäß Bild II-26. Der Widerstand R_1 ist 6Ω , die Spannung U ist $1,8 \text{ V}$. Um wieviel Prozent ändert sich die Spannung U_R , wenn zu R_1 ein Widerstand R_2 von 4Ω parallel geschaltet wird?

Die Kennlinie von R_1 ist die Gerade 2. Der Schnittpunkt mit der Spannungssache liegt bei $1,8 \text{ V}$, der mit der Stromachse bei $I = \frac{U}{R_1} = \frac{1,8 \text{ V}}{6 \Omega} = 0,3 \text{ A}$. Schnittpunkt mit Kennlinie 1: $U_D = 0,9 \text{ V}$;

$$U_R = U - U_D = 1,8 \text{ V} - 0,9 \text{ V} = 0,9 \text{ V} .$$

Der Widerstand R ändert sich durch die Parallelschaltung auf den Wert $R = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} \Omega = 2,4 \Omega$. Die zugehörige Kennlinie ist die Gerade 3, die bei $I = \frac{1,8 \text{ V}}{2,4 \Omega} = 0,75 \text{ A}$ die Ordinate schneidet. Der Schnittpunkt mit der Kurve 1 liegt bei $1,0 \text{ V}$. Die Spannung am Widerstand ist jetzt $U'_R = 1,8 \text{ V} - 1,0 \text{ V} = 0,8 \text{ V}$.

$\frac{U'_R - U_R}{U_R} = \frac{0,8 - 0,9}{0,9} = -0,11$. Die Spannung hat sich um 11% verringert.

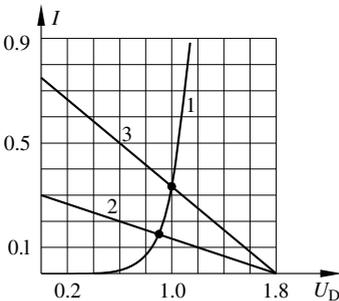


Bild II-26 Beispiel Nichtlinearer Kreis

7 Energie, Leistung, Wirkungsgrad

Fließt durch einen Widerstand R eine Ladung Q , wird die Arbeit W nach Gleichung (I.3) bestimmt.

$$\text{Arbeit } W = U \cdot I \cdot t \quad \frac{W}{J} = \frac{W}{W \cdot s} = \frac{U}{V} \cdot \frac{I}{A} \cdot \frac{t}{s} \quad (\text{II.67})$$

Hieraus bestimmt sich die Leistung P .

$$\text{Leistung } P = \frac{W}{t} = U \cdot I \quad \frac{P}{W} = \frac{P}{W \cdot A} = \frac{U}{V} \cdot \frac{I}{A} \quad (\text{II.68})$$

Die Einheit der Leistung ist das *Watt*. Die Rückführung auf die SI-Grundeinheiten ergibt

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} \quad (\text{II.69})$$

Für die Leistung lassen sich mit Hilfe des *Ohmschen Gesetzes* nach Gleichung (I.11) die folgenden Beziehungen ableiten:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (\text{II.70})$$

$$P = R \cdot I^2 \quad (\text{II.71})$$

7.1 Leistungsanpassung

Wird in einem Gleichstromkreis ein Ohmscher Verbraucher an eine reale Spannungsquelle angeschlossen, ist die vom Verbraucher aufgenommene Leistung abhängig von dessen Widerstand. Betrachtet wird die Schaltung nach Bild II-15. U_q und R_i der Spannungsquelle sind bekannt. Die vom Verbraucher aufgenommene Leistung ist dann

$$P_V = U_K \cdot I = U_q \frac{R_a}{R_i + R_a} \cdot \frac{U_q}{R_i + R_a} \quad (\text{II.72})$$

$$P_V = U_q^2 \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \quad (\text{II.73})$$

Für die Extremfälle $R_a = 0 \Omega$ und $R_a = \infty$ verschwindet die aufgenommene Leistung. Dazwischen muß ein Maximum liegen. Die Lage dieses Maximums läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

$$\frac{dP_V}{dR_a} = \frac{(R_i + R_a)^2 - 2R_a(R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} \quad (\text{II.74})$$

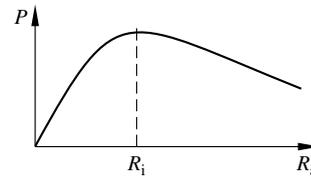


Bild II-27 Leistungsanpassung

Zur Bestimmung der Lage des Maximums muß dieser Ausdruck = 0 werden. Das ist dann der Fall, wenn der Zähler = 0 wird. Man erhält die Gleichung

$$(R_i + R_a)^2 - 2R_a(R_i + R_a) = 0 \quad (\text{II.75})$$

mit der Lösung $R_a = R_i$ (II.76)

In diesem Fall ist der Leistungsverlust am Innenwiderstand gleich der vom Verbraucher aufgenommenen Leistung. Bei großen Leistungen kann man keine Leistungsanpassung vornehmen; verwendet wird sie allerdings häufig in der Nachrichtentechnik.

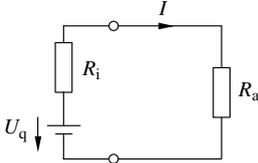


Bild II-28 Beispiel Leistungsanpassung

■ **Beispiel:** In der Schaltung Bild II-28 sind $U_q = 10 \text{ V}$ und $R_i = 0,5 \Omega$.

- a) Welchen Wert muß R_a haben, damit er eine Leistung von 10 W verbraucht?
- b) Welche Leistung kann R_a maximal umsetzen?

a) $P_a = I^2 \cdot R_a = \left(\frac{U_q}{R_i + R_a}\right)^2 \cdot R_a$ (II.77)

$P_a(R_i + R_a)^2 = U_q^2 \cdot R_a$ (II.78)

$R_a^2 + \left(2R_i - \frac{U_q^2}{P_a}\right)R_a + R_i^2 = 0$ (II.79)

$R_a^2 - 9 \Omega R_a + 0,25 \Omega^2 = 0;$

$R_{a1} = (4,5 + \sqrt{4,5^2 - 0,25}) \Omega = 8,97 \Omega;$

$R_{a2} = (4,5 - \sqrt{4,5^2 - 0,25}) \Omega = 0,28 \Omega$

b) $P_{a\max} = \left(\frac{U_q}{R_i + R_i}\right)^2 \cdot R_i = \left(\frac{10}{1}\right)^2 \cdot 0,5 \text{ W} = 50 \text{ W}$

7.2 Leistungsverlust auf Leitungen

Da jede Zuleitung zu einem Verbraucher einen Ohmschen Widerstand R_L besitzt, wird immer elektrische Energie verbraucht. Der Widerstand der Zuleitung berechnet sich nach Gleichung (I.14). Hierbei ist für l die gesamte Leiterlänge, also der doppelte Abstand zwischen Verbraucher und Spannungsquelle einzusetzen.

■ **Beispiel:** Ein Verbraucher ist 2,4 km von der Spannungsquelle entfernt. Die Leitung besteht aus Kupfer und hat einen Durchmesser von 8 mm. Wieviel Prozent der am Verbrauchsort zur Verfügung stehenden Leistung von 20 kW gehen verloren, wenn die Spannung

beim Verbraucher 440 V beträgt $\left(\rho_{\text{Cu}} = 0,0173 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}\right)$?

Leitungswiderstand $R_L = \frac{\rho \cdot 2l}{A} = \frac{0,0173 \cdot 4800 \cdot 4}{\pi \cdot 8^2} \Omega = 1,65 \Omega;$

Strom $I = \frac{20 \text{ kW}}{440 \text{ V}} = 45,45 \text{ A};$

Verlust auf der Leitung $P_L = R_L \cdot I^2 = 1,65 \cdot 45,45^2 \text{ W} = 3408 \text{ W}$

prozentualer Anteil $\frac{100 \cdot 3408}{20000} \% = 17\%$

7.3 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad η ist definiert als Verhältnis von zugeführter Energie W_{Zu} oder Leistung P_{Zu} zur Nutzenergie W_N oder Nutzleistung P_N . Da es bei allen Maschinen und Antrieben Verluste gibt, ist der Wirkungsgrad immer kleiner als 1 oder 100%.

Wirkungsgrad $\eta = \frac{W_N}{W_{\text{Zu}}} = \frac{P_N}{P_{\text{Zu}}} \leq 1$ (II.80)

Die Differenz zwischen zugeführter Leistung und Nutzleistung ist die Verlustleistung.

Verlustleistung $P_V = P_{\text{Zu}} - P_N$ (II.81)

7.4 Umwandlung elektrischer Energie

Elektrische Energie kann in andere Energieformen umgewandelt werden. Beispiele sind Umwandlung in Wärmeenergie (Kochplatte, Tauchsieder) oder mechanische Energie (Antriebe, Pumpen).

7.4.1 Wärme

Die für eine Temperaturerhöhung von ΔT oder $\Delta \vartheta$ notwendige Wärmeenergie ΔQ ist gegeben durch

$\Delta Q = mc \Delta T = mc \Delta \vartheta$ (II.82)

Da die Kelvin-Skala und die Celsius-Skala dieselben Temperaturschritte haben, kann die Temperaturdifferenz sowohl in K als auch in $^\circ\text{C}$ angegeben werden. m ist die Masse und c die spezifische Wärmekapazität des zu erwärmenden Materials. Sie beträgt für

Wasser $c_{\text{Wasser}} = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$.

■ **Beispiel:** Wieviel Liter Wasser lassen sich mit einer elektrischen Energie von 15 kWh von $\vartheta_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ erwärmen (1 Liter Wasser hat die Masse 1 kg)?

1 kWh = 3600 kWs

$m = \frac{\Delta Q}{c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{15 \cdot 3600 \text{ kJ}}{4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (80 - 15) \text{ K}} = 198,3 \text{ kg}$

■ **Beispiel:** Wie lange dauert es, um 5 l Wasser von $\vartheta_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ mit einer Kochplatte, die eine Leistungsaufnahme von 800 W hat, zum Sieden zu bringen ($\vartheta_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$)? Der Wirkungsgrad beträgt 75%.

$P_N = \eta \cdot P_{\text{Zu}};$ $P_N = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{t};$

$t = \frac{m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{P_{\text{Zu}} \cdot \eta}$

$t = \frac{5 \text{ kg} \cdot 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (100 - 15) \text{ K}}{0,8 \frac{\text{kJ}}{\text{s}} \cdot 0,75} = 2986 \text{ s} = 49,5 \text{ min}$

7.4.2 Mechanische Energie

Elektrische Energie kann auch in potentielle oder kinetische Energie umgewandelt werden. Für diese Energieformen gelten die Gleichungen:

$$E_{\text{pot}} = mgh \text{ und } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (siehe Physik II.2.4).}$$

Hierbei gilt natürlich ebenfalls der Energieerhaltungssatz.

- **Beispiel:** Aus einer Grube sollen bei täglich 6 h Arbeitszeit innerhalb von 3 Tagen 12000 m³ Wasser über eine Förderhöhe von 10 m gepumpt werden. Welche Leistung muß der Motor aufnehmen, wenn ein Wirkungsgrad $\eta = 70\%$ vorhanden ist?

$$W_{\text{Pot}} = mgh; P_{\text{Zu}} = \frac{mgh}{t \cdot \eta} = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}{0,7 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 3600) \text{ s}} = 25,9 \text{ kW}$$

- **Beispiel:** Eine Güterzuglokomotive soll einen Güterzug von 500 t auf eine Geschwindigkeit von 100 km/h bringen. Die Lokomotive nimmt eine konstante Leistung von 2000 kW bei einem Wirkungsgrad von 40% auf. Wie lange braucht der Zug bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit?

$$P_{\text{Zu}} \cdot \eta = \frac{W_{\text{kin}}}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t};$$

$$t = \frac{mv^2}{2 \cdot \eta \cdot P_{\text{Zu}}} = \frac{500 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(\frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 0,4 \cdot 2000 \cdot 10^3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}} = 241 \text{ s} = 4 \text{ min}$$

- **Beispiel:** Ein Gleichstrommotor wird mit dem Drehmoment $M = 35 \text{ Nm}$ belastet und hat dabei die Drehzahl $n = 1500 \frac{1}{\text{min}}$. Die am Motor liegende Spannung beträgt $U = 400 \text{ V}$, der aufgenommene Strom $I = 17 \text{ A}$. Wie groß ist der Wirkungsgrad des Motors?

$$P_N = 2\pi nM; P_N = 2\pi \frac{1500}{60} \frac{1}{\text{s}} \cdot 35 \text{ Nm} = 5497 \text{ W};$$

$$P_{\text{Zu}} = UI = 400 \cdot 17 \text{ W} = 6800 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_N}{P_{\text{Zu}}} = \frac{5497 \text{ W}}{6800 \text{ W}} = 0,81 \text{ oder } 81\%.$$

III Das Elektrische Feld

Wenn in jedem Punkt des Raumes eine physikalische oder technische Größe definiert ist, so bezeichnet man dies als *Feld*. So kann man z.B. in jedem Punkt eines Zimmers eine Temperatur messen; es ist ein *Temperaturfeld* definiert. An jedem Punkt über der Erdoberfläche herrscht eine Anziehungskraft, dies ergibt ein *Kraftfeld*, in diesem Fall das *Gravitationsfeld*. Im ersten Fall liegt, da die Temperatur eine skalare Größe ist, ein *Skalarfeld*, im zweiten Fall ein *Vektorfeld* vor.

1 Grundgrößen

1.1 Kräfte zwischen Ladungen

Zwischen elektrischen Ladungen bestehen immer Kräfte. Haben zwei Ladungen das gleiche Vorzeichen, stoßen sie sich ab, bei ungleichem Vorzeichen ziehen sie sich an. Die Größe der Kraft hängt von der Größe der Ladungen und von deren Abstand ab und wird durch das *Coulombsche Gesetz* beschrieben.

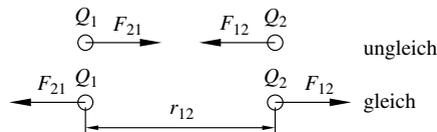


Bild III-1 Coulombsches Gesetz

$$\text{Coulombsches Gesetz } F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{III.1})$$

Die Größe ϵ_0 heißt *elektrische Feldkonstante*

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (\text{III.2})$$

Der Abstand zwischen den beiden Ladungen ist r_{12} . Die Richtung der Kraft ist durch die Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen gegeben. Die Ladung Q_1 übt auf die Ladung Q_2 die Kraft F_{12} aus. Im Bild III-1 oben haben die Ladungen unterschiedliches Vorzeichen, die Kraftpfeile sind aufeinander zu gerichtet. Im unteren Teil haben die Ladungen gleiches Vorzeichen. Die Ladung Q_2 übt auf Q_1 eine entgegengesetzt gleich große Kraft aus. Sind mehr als 2 Ladungen vorhanden, werden zunächst die Kräfte zwischen zwei Ladungen berechnet und dann aus allen Kräften die resultierende Kraft bestimmt.

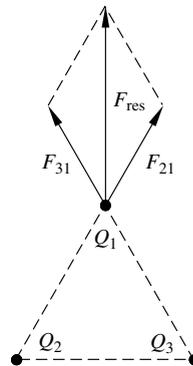


Bild III-2
Beispiel Kräfte zwischen Ladungen

- **Beispiel:** Drei Ladungen ($Q_1 = -3 \text{ As}$, $Q_2 = Q_3 = 3 \text{ As}$, Bild III-2) befinden sich an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks ($a = 5 \text{ cm}$). Wie groß ist die Kraft auf die Ladung Q_1 ?

Da die Ladungen vom Betrag her gleich sind und gleiche Abstände haben, gilt für die Beträge $F_{21} = F_{31}$. Die Richtungen sind unterschiedlich und verlaufen in Verlängerung der Dreiecksseiten.

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ As} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{(0,05 \text{ m})^2} = 32,35 \text{ N}$$

Die Größe der resultierenden Kraft kann entweder aus der Zeichnung abgelesen werden oder mit Hilfe der Trigonometrie berechnet werden:

$$F_{\text{res}} = 2 \cdot 32,35 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 56 \text{ N}$$

1.2 Feldstärke

Kräfte zwischen Ladungen sind im ganzen Raum vorhanden, deshalb liegt ein *Feld* vor. Werden zwei Ladungen Q und q im Abstand r betrachtet, kann man willkürlich eine der beiden Ladungen als felderzeugende Ladung Q , die andere als Probeladung q annehmen. Das Coulombsche Gesetz lautet dann

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \tag{III.3}$$

Wird nun, um eine Definition unabhängig von der Probeladung q zu erhalten, der Quotient $\frac{F}{q}$ betrachtet, erhält man eine Größe, die allein von der felderzeugenden Ladung Q und dem Abstand r abhängig ist. Diese Größe nennt man die *elektrische Feldstärke*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \frac{E}{\frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}} \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \frac{q}{\text{As}} \tag{III.4}$$

Da die Kraft ein Vektor ist, muß auch die elektrische Feldstärke ein Vektor sein. Die Richtung von \vec{E} ist gleich der Richtung von \vec{F} auf eine positive Probeladung. Die Feldstärke ist von der felderzeugenden Ladung und deren geometrischer Anordnung abhängig. Ist Q eine Punktladung, kann die elektrische Feldstärke nach (III.3) und (III.4) angegeben werden.

Feld einer Punktladung $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \tag{III.5}$

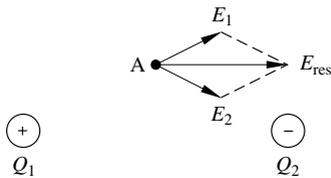


Bild III-3 Elektrisches Feld

Sind mehrere Ladungen beteiligt, können auch hier wieder die einzelnen Beiträge vektoriell addiert werden. Dies soll am Beispiel eines *Dipols* nach Bild III-3 dargestellt werden. Ein *Dipol* besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzten Ladungen. Die positive Ladung Q_1 erzeugt im Punkt A die Feldstärke \vec{E}_1 . Da Q_1 positiv ist, zeigt \vec{E}_1 von Q_1 weg. Die negative Ladung Q_2 erzeugt die zur Ladung gerichtete

Feldstärke \vec{E}_2 . Hieraus ergibt sich die resultierende Feldstärke \vec{E}_{res} .

1.3 Feldlinien

Die Konstruktion nach Bild III-3 kann in beliebigen Punkten durchgeführt werden, somit kann in jedem Punkt der Vektorpfeil der resultierenden elektrischen Feldstärke konstruiert werden. Werden die Anfangspunkte der Pfeile durch tangentielle Linien verbunden, erhält man für diesen Dipol Linien wie in Bild III-4. Diese Linien sind die *elektrischen Feldlinien*.

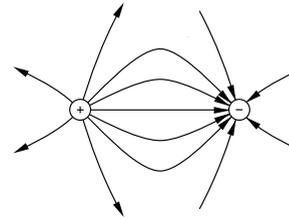


Bild III-4
Dipol

Eigenschaften elektrischer Feldlinien: Sie verlaufen von der positiven zur negativen Ladung. Die Tangenten geben die Richtung der Kraft auf eine positive Probeladung an. An den Orten größerer Feldlinien-dichte ist die Kraftwirkung größer. Elektrische Feldlinien schneiden sich nie. Da in elektrischen Leitern die Ladungen frei beweglich sind, werden sie solange verschoben, bis keine tangentielle Kraft mehr vorhanden ist. Daher stehen Feldlinien immer senkrecht auf elektrischen Leitern.

Im Bild III-5 sind einige Feldlinienbilder angegeben. Links für eine positive Punktladung, in der Mitte für zwei entgegengesetzt geladene Platten, rechts für eine positiv geladene Spitze vor einer ebenen Leiterfläche.

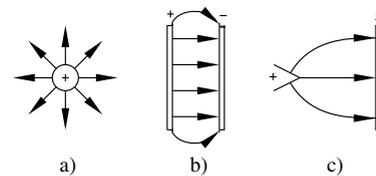


Bild III-5 Feldlinienbilder

1.4 Potential, Spannung

Wenn in einem elektrischen Feld eine positive Ladung von einem Punkt A nach einem Punkt B verschoben wird, muß gegen die herrschende Kraft *Verschiebungsarbeit* verrichtet werden.

Verschiebungsarbeit

$$W_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{III.6}$$

Es kann gezeigt werden, daß diese Arbeit unabhängig vom Weg ist. Sie hängt nur von der Lage der beiden

Punkte im elektrischen Feld ab. Das Vorzeichen in Gleichung (III.6) ist so gewählt, daß zu leistende Arbeit positiv gezählt wird.

$$W_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = qU_{AB} \quad (III.7)$$

$$\text{Spannung } U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (III.8)$$

Wird der Ausgangspunkt A sehr weit (im Grenzfall ins Unendliche) entfernt, ist der Quotient aus der jetzt aufzubringenden Arbeit und der Probeladung q das

$$\text{Potential } \varphi_B = \frac{W_{\infty B}}{q} = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (III.9)$$

Die Spannung zwischen zwei Punkten A und B ist die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten.

$$\text{Spannung } U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi \quad (III.10)$$

$$\Delta W_{AB} = q \cdot \Delta\varphi \quad (III.11)$$

Ist das elektrische Feld nach Betrag und Richtung konstant, spricht man von einem *homogenen Feld*. Wird der Abstand zwischen den Punkten A und B mit d bezeichnet, folgt aus Gleichung (III.8) im homogenen Feld

$$\text{homogenes Feld: } U = E \cdot d \quad (III.12)$$

1.5 Äquipotentiallinien

Werden in einem elektrischen Feld Punkte mit gleichem Potential durch Linien verbunden, entstehen die *Äquipotentiallinien*. Zwischen zwei Punkten auf einer Äquipotentiallinie besteht keine Potentialdifferenz und auch keine Spannung. Hieraus folgt, daß bei Verschiebung einer Ladung auf einer Äquipotentiallinie keine Verschiebungsarbeit zu verrichten ist. Weiterhin folgt aus der Vektorrechnung, daß Äquipotentiallinien und Feldlinien immer senkrecht aufeinander stehen müssen. Da Feldlinien auch immer senkrecht auf Leiteroberflächen stehen, sind alle Leiteroberflächen auch Äquipotentiallinien. Meßtechnisch einfacher ist es, Potentiallinien auszumessen. Sind sie bekannt, können die für die Kraftwirkungen wichtigen Feldlinien konstruiert werden. Im Bild III-6 sind für eine metallische Spitze und eine ebene metallische Gegenelektrode die Äquipotentiallinien

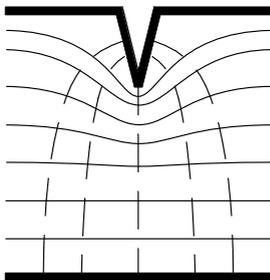


Bild III-6
Äquipotentiallinien

(durchgezogen) und die elektrischen Feldlinien (gestrichelt) dargestellt.

1.6 Elektrischer Fluß

Die elektrischen Ladungen sind Ausgangspunkt der elektrischen Feldlinien. Je größer die Ladung, desto mehr Feldlinien gehen von ihr aus. Denkt man sich eine Kugel mit dem Radius r um eine Ladung, so bezeichnet man alle durch die Kugeloberfläche durchtretenden Feldlinien als den elektrischen Fluß ψ . Ladung Q und Fluß ψ sind *direkt proportional* zueinander. Die Konstante wird zu 1 festgelegt und es gilt

$$\psi = Q \quad (III.13)$$

Für eine Punktladung gilt nach Gleichung (III.5)

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 E \quad (III.14)$$

$$\text{Oberfläche einer Kugel } A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2 \quad (III.15)$$

$$\text{elektrischer Fluß } \psi = Q = A_{\text{Kugel}} \cdot \epsilon_0 E \quad (III.16)$$

Der Fluß, dividiert durch die gesamte Oberfläche der Kugel, wird als *Flußdichte* D bezeichnet.

$$\text{Flußdichte } D = \frac{\psi}{A} = \frac{\frac{D}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \left| \frac{\psi}{\text{As}} \right| \frac{A}{\text{m}^2}}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \quad (III.17)$$

$$\text{Flußdichte } D = \epsilon_0 E = \frac{D}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \right| \frac{E}{\frac{\text{V}}{\text{m}}} \quad (III.18)$$

Allgemeiner formuliert lautet Gleichung (III.17) in Verbindung mit Gleichung (III.13):

Der durch eine geschlossene, beliebig geformte Oberfläche A gehende elektrische Fluß ψ ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen.

$$\psi = \oint \vec{D} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (III.19)$$

Daraus folgt für die elektrische Feldstärke eine der vier grundlegenden Maxwellschen Gleichungen

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (III.20)$$

Steht das elektrische Feld überall senkrecht zu A und ist es konstant, so ist

$$D = \frac{Q}{A} \quad (III.21)$$

1.7 Energie geladener Teilchen im elektrischen Feld

Da auf geladene Teilchen im elektrischen Feld immer eine Kraft wirkt, werden sie nach den Gesetzen der Mechanik immer beschleunigt.

$$F_{\text{el}} = qE = ma \quad (III.22)$$

Ist das elektrische Feld konstant, so ist auch die Beschleunigung konstant. Nach Durchlaufen einer Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ sind die erreichte Bewegungsenergie und die elektrische Energie nach Gleichung (III.11) gleich.

$$\frac{1}{2}mv^2 = q \cdot \Delta\varphi = qU \tag{III.23}$$

Wenn ein Elektron die Potentialdifferenz von 1V durchläuft, hat es die Energie von $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Hieraus leitet sich eine Energieeinheit ab:

$$1 \text{ Elektronenvolt } 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \tag{III.24}$$

2 Materie im elektrischen Feld

Befindet sich Materie in einem elektrischen Feld, wirkt auf alle Ladungen in dieser Materie eine elektrische Kraft. Da in Leitern und Nichtleitern unterschiedliche Beweglichkeit der Ladungsträger vorliegt, sind auch die beobachteten Effekte von den Leitereigenschaften der Materialien abhängig.

2.1 Leiter

In einem Leiter sind die Ladungsträger (in Metallen sind das die Elektronen) frei beweglich. Bringt man zwei aufeinander liegende Metallplatten in ein elektrisches Feld, werden die Ladungen so verschoben (Bild III-7), daß sich eine gleiche Anzahl von Ladungen auf den entsprechenden Oberflächen gegenüber liegen. Im Leiter wird durch diese Ladungsverschiebung ein Feld E_{infl} erzeugt, das denselben Betrag wie das äußere Feld, aber entgegengesetzte Richtung hat. Das resultierende elektrische Feld im Inneren eines Leiters verschwindet daher immer.

$$E_i = E_a - E_{\text{infl}} = 0 \tag{III.25}$$

Diese Ladungsverschiebung heißt *Influenz*. Werden die Platten im elektrischen Feld getrennt und dann aus dem Feld genommen, bleiben die Platten geladen.

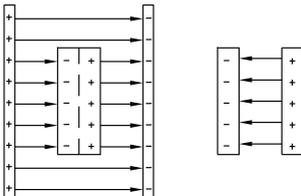


Bild III-7
Influenz

2.2 Nichtleiter

In Nichtleitern gibt es keine frei beweglichen Ladungen. Deshalb ist auch das Innere eines Nichtleiters im elektrischen Feld nicht feldfrei. Diese Stoffe werden *Dielektrika* genannt. Hier kann durch das äußere Feld ein inneres Feld erzeugt werden, indem die negative Elektronenhülle eines Atoms sich gegenüber dem

positiven Kern verschieben kann. Es entsteht ein elektrischer Dipol. Auch können eventuell schon vorhandene Dipole im Feld gedreht werden. Es entsteht ein *Polarisationsfeld* E_p , das dem äußeren Feld E_0 entgegengesetzt gerichtet ist. Im Inneren ist das resultierende Feld

$$E_i = E_0 - E_p \tag{III.26}$$

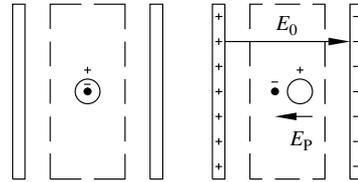


Bild III-8 Polarisation

Das Feld im Inneren ist gegenüber dem ursprünglichen Feld E_0 geschwächt worden. Zahlenmäßig wird dies durch

$$E_i = \frac{E_0}{\epsilon_r} \tag{III.27}$$

erfaßt. ϵ_r ist die *Permittivitätszahl* des Materials. Sind die äußeren Platten mit einer konstanten Spannungsquelle verbunden, fließen nach Einbringen eines Dielektrikums so viele Ladungen nach, bis sich das ursprüngliche Feld E_0 wieder eingestellt hat. Damit wird aber nach Gleichung (III.13) der elektrische Fluß ψ und auch die Flußdichte D ebenfalls größer und es gilt

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E \tag{III.28}$$

Tabelle III-1 Permittivitätszahlen bei 20 °C

Werkstoff	ϵ_r
Glas	4 ... 12
Glimmer	5 ... 8
Porzellan	6
Transformatoröl	2,3
Wasser	81
Luft	1,0006

3 Kondensatoren

Wenn zwischen zwei isolierten Leiteroberflächen eine Spannung liegt, laden sich die Leiteroberflächen auf. Ein solches Bauelement ist ein *Kondensator*. Er dient zur Speicherung elektrischer Ladungen und Energie. Die Ladungsmenge Q , die bei vorgegebener Spannung U gespeichert werden kann, hängt von der Geometrie und vom Material zwischen den Kondensatorplatten ab. Der Quotient aus Q und U wird als *Kapazität* bezeichnet.

3.1 Kapazität

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert durch

$$\text{Kapazität } C = \frac{Q}{U} \quad \frac{C}{F} = \frac{Q}{As} \left| \frac{U}{V} \right| \quad (\text{III.29})$$

Die Einheit der Kapazität ist 1 F (1 Farad).

3.1.1 Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten im Abstand d . Bis auf den Randbereich ist das elektrische Feld E homogen. Befindet sich zwischen den Platten Vakuum oder Luft, gilt

$$D = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d} \quad (\text{III.30})$$

$$C_{\text{Pl}} = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (\text{III.31})$$

Befindet sich zwischen den Platten ein Material mit der Permittivitätszahl ϵ_r , dann gilt

$$C_{\text{Pl}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (\text{III.32})$$

3.1.2 Spezielle Kondensatoren

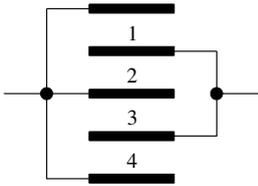


Bild III-9 Blockkondensator

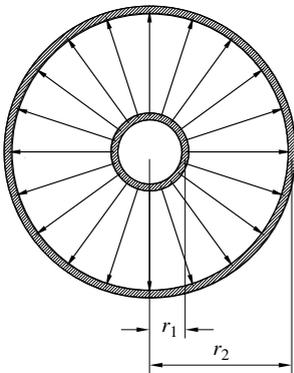


Bild III-10 Kugelkondensator

Ein *Blockkondensator* besteht aus n Platten eines Kondensators, die wie in Bild III-9 verbunden sind. Es ist eine Parallelschaltung mit $(n - 1)$ wirksamen Kondensatoren.

$$\text{Blockkondensator } C_{\text{Block}} = (n - 1) \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (\text{III.33})$$

Ein *Kugelkondensator* besteht aus zwei konzentrisch angebrachten Kugeln. Die Vorteile eines Kugelkondensators liegen darin, daß keine Streufelder auftreten, da keine Ecken vorhanden sind. Die elektrischen Feldlinien verlaufen radial-symmetrisch und ändern ihren Abstand von innen nach außen. Das Feld ist also nicht homogen. Für die Kapazität eines Kugelkondensators ergibt sich mit der in Bild III-10 dargestellten Geometrie:

$$\text{Kugelkondensator } C_{\text{Kugel}} = 4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{III.34})$$

Der *Zylinderkondensator* besteht aus zwei ineinander liegenden konzentrischen Zylindern. Wird der Radius des äußeren Zylinders mit r_2 und der des inneren Zylinders mit r_1 bezeichnet, gilt bei einer Länge L des Kondensators für die Kapazität:

$$\text{Zylinderkondensator } C_{\text{Zyl}} = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{III.35})$$

Jedes *Koaxialkabel* ist von seiner Bauform her ein Zylinderkondensator. In der Hochfrequenztechnik ist diese Kapazität daher zu berücksichtigen. Für die Kapazität einer *einzelnen zylindrischen Leitung* mit dem Radius r , die in einer Höhe h über der Erde liegt, gilt

Kapazität einer Leitung

$$C_L = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{h}{r} + \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1}\right)} \quad (\text{III.36})$$

$$\text{für } h \gg r \quad C_L = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)} \quad (\text{III.37})$$

Auch zwei im Abstand d verlaufende Leitungen mit dem Radius r und der Länge L besitzen eine Kapazität.

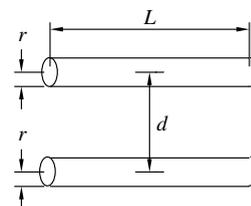
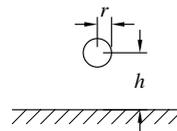


Bild III-11 Kapazität von Leitungen

Kapazität einer Doppelleitung

$$C_{DL} = \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 1}\right)} \quad (III.38)$$

für $d \gg r$ $C_{DL} = \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{d}{r}\right)}$ (III.39)

■ **Beispiel:** In einem Plattenkondensator nach Bild III-12 sind $d_1 = 0,3$ mm, $d_2 = 0,5$ mm starke Isolierplatten untergebracht. Ihre Permittivitätszahlen sind $\epsilon_{r1} = 3,8$ und $\epsilon_{r2} = 4,7$. Die Fläche A einer Platte beträgt 900 cm². Die obere Platte trägt die positive Ladung $Q = 2,5 \cdot 10^{-6}$, die untere die negative Ladung $-Q$. Wie groß sind die Flußdichten und die elektrischen Feldstärken in den beiden Dielektrika und die Spannungen, mit denen die Isolierplatten beansprucht werden?

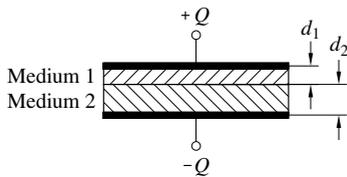


Bild III-12 Beispiel Plattenkondensator

Die Flußdichte muß in beiden Materialien gleich sein, da beide Platten des Kondensators die gleiche Ladung tragen.

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{A} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{900 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 3,8} = 826 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 826 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4,7} = 668 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 668 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

$$U_1 = E_1 \cdot d_1 = 826 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0,3 \text{ mm} = 248 \text{ V} ;$$

$$U_2 = 668 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0,5 \text{ mm} = 334 \text{ V}$$

■ **Beispiel:** Ein Koaxialkabel enthält nach Bild III-13 zwei Isolationsschichten mit $\epsilon_{r1} = 3$ und $\epsilon_{r2} = 2$, einen Innenleiter mit dem Radius $r_1 = 5$ mm, einen Außenleiter mit $r_3 = 15$ mm. Der Radius r_2 ist $7,5$ mm. Wie groß ist die Kapazität des Kabels je km Leitungslänge?

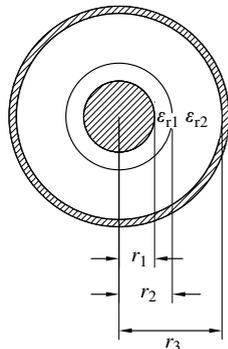


Bild III-13 Beispiel Koaxialkabel

Mit Gleichung (III.20) wird

$$E_1 = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r l} ; \quad E_2 = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r l} ;$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr \quad (III.40)$$

$$U = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 l} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) \quad (III.41)$$

Die Kapazität pro Länge l $C' = \frac{Q}{Ul} = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{r_3}{r_2}}$ (III.42)

$$C' = \frac{2 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}}{\frac{1}{3} \ln \frac{7,5}{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{15}{7,5}} = 115,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} = 115 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$$

3.2 Schaltungen mit Kondensatoren

3.2.1 Reihenschaltung

Werden zwei in Reihe geschaltete ungeladene Kondensatoren aufgeladen, muß auf jeden Kondensator dieselbe Ladungsmenge ΔQ geflossen sein.

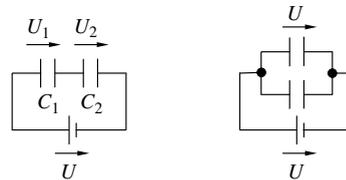


Bild III-14 Kondensatorschaltungen

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = Q \quad (III.43)$$

$$U = U_1 + U_2 \quad (III.44)$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{U_1}{Q}, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{U_2}{Q} \quad (III.45)$$

$$\frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} \quad (III.46)$$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (III.47)$$

Reihenschaltung $\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ (III.48)

3.2.2 Parallelschaltung

Sind zwei Kondensatoren parallel geschaltet, liegt an beiden die Spannung U . Für die während des Ladens aus der Spannungsquelle entnommene Ladung ΔQ gilt jetzt

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \quad (III.49)$$

Da die Kondensatoren zu Beginn nicht geladen waren ($Q_v = 0$), gilt

$$\Delta Q_1 = Q_n - Q_v = Q \quad (III.50)$$

$$\frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} \quad \text{(III.51)}$$

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 \quad \text{(III.52)}$$

$$\text{Parallelschaltung } C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i \quad \text{(III.53)}$$

3.2.3 Gemischte Schaltungen

■ **Beispiel:** Die Gesamtkapazität der Schaltung nach Bild III-15 mit den Werten $C_1 = 80 \text{ pF}$, $C_2 = 20 \text{ pF}$, $C_3 = 200 \text{ pF}$, $C_4 = 100 \text{ pF}$ soll berechnet werden.

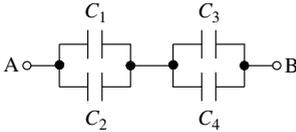


Bild III-15 Beispiel Berechnung der Gesamtkapazität

Die linke Gruppe ergibt 100 pF , die rechte Gruppe 300 pF . Die Gesamtkapazität ist dann $C_{\text{ges}} = \frac{100 \cdot 300}{100 + 300} \text{ pF} = 75 \text{ pF}$.

■ **Beispiel:** Die in der Schaltung nach Bild III-16 vorhandenen Kondensatoren sind zunächst nicht aufgeladen. Welche Ladungen und welche Teilspannungen haben die Kondensatoren nach Schließen des Schalters S ($C_1 = 300 \text{ nF}$, $C_2 = 200 \text{ nF}$, $C_3 = 400 \text{ nF}$, $U = 120 \text{ V}$)?

Die Ladungsmenge, die durch C_1 fließt, muß auch durch die Parallelkombination fließen. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen

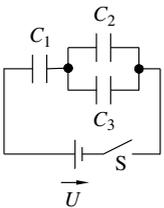


Bild III-16 Beispiel Umladungsvorgänge mit Spannungsquelle

$$U = U_1 + U_{23}; \quad \Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3;$$

$$C_1 U_1 = C_2 U_{23} + C_3 U_{23} = U_{23} (C_2 + C_3);$$

$$U_{23} = U_1 \frac{C_1}{C_2 + C_3}; \quad U = U_1 + U_1 \frac{C_1}{C_2 + C_3} = U_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2 + C_3} \right);$$

$$U_1 = \frac{U}{1 + \frac{C_1}{C_2 + C_3}} = \frac{120 \text{ V}}{1 + \frac{300}{200 + 400}} = 80 \text{ V}$$

$$U_2 = U - U_1 = 120 \text{ V} - 80 \text{ V} = 40 \text{ V};$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 300 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 80 \text{ V} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ As};$$

$$Q_2 = C_2 U_{23} = 200 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 40 \text{ V} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ As};$$

$$Q_3 = C_3 U_{23} = 400 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 40 \text{ V} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

■ **Beispiel:** Der Kondensator $C_1 = 8 \text{ nF}$ ist zunächst mit einer Spannungsquelle von $U = 150 \text{ V}$ verbunden, C_2 ist in gleicher Richtung auf 50 V aufgeladen, C_3 ist ungeladen. Anschließend

werden die Kondensatoren in geladenem Zustand von den Spannungsquellen getrennt und der Schalter S geschlossen ($C_2 = 3 \text{ nF}$ und $C_3 = 6 \text{ nF}$). Auf welche Spannungen werden die einzelnen Kondensatoren aufgeladen?

Die Spannungen an den einzelnen Kondensatoren vor Schließen des Schalters werden mit U^* bezeichnet, nach Umladen werden die Spannungen mit U benannt. Für die einzelnen Spannungen gilt $\Delta U_i = U_i - U_i^*$. Die Ladungsmenge, die vom Kondensator C_1 fließt, muß sowohl C_2 als auch C_3 aufladen. Außerdem gilt die Maschenregel.

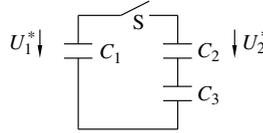


Bild III-17 Beispiel Umladungsvorgänge ohne Spannungsquelle

$$\Delta U_i = U_i - U_i^*; \quad \Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_3;$$

$$-C_1 \cdot \Delta U_1 = C_2 \cdot \Delta U_2; \quad -C_1 \cdot \Delta U_1 = C_3 \cdot \Delta U_3$$

Hieraus lassen sich für die drei gesuchten Spannungen für den allgemeinen Fall, daß die Kondensatoren 2 und 3 vor dem Umladungsprozess schon aufgeladen sind, die drei Gleichungen ableiten:

$$U_1 - U_2 - U_3 = 0; \quad C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 = C_1 \cdot U_1^* + C_2 \cdot U_2^*;$$

$$C_1 \cdot U_1 + C_3 \cdot U_3 = C_1 \cdot U_1^* + C_3 \cdot U_3^*$$

Zahlenwerte:

$$U_1 - U_2 - U_3 = 0; \quad 8U_1 + 3U_2 = 8 \cdot 150 \text{ V} + 3 \cdot 50 \text{ V};$$

$$8U_1 + 6U_3 = 8 \cdot 150 \text{ V}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen

$$U_1 = 130 \text{ V}; \quad U_2 = 103,33 \text{ V}; \quad U_3 = 26,67 \text{ V}.$$

3.3 Energie des elektrostatischen Feldes

In einem aufgeladenen Kondensator ist eine bestimmte Energie gespeichert. Die Größe der gespeicherte Energie kann durch die Formel

$$\Delta W = u \Delta q \quad \text{(III.54)}$$

bestimmt werden.

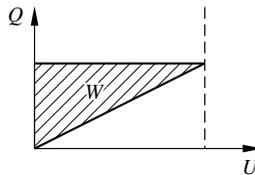


Bild III-18 Energie im elektrischen Feld

Mit u ist die zeitlich veränderliche Spannung am Kondensator gemeint. Die Ladung q und die Spannung u sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern über Gleichung (III.29) verbunden.

Energie eines Kondensators

$$W = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad \text{(III.55)}$$

Grafisch ist die Energie, die bei einer Spannung U und der damit im Kondensator vorhandenen Ladung Q gespeichert ist, durch die schraffierte Dreiecksfläche in Bild III-18 gegeben.

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 \quad (III.56)$$

Die im Kondensator gespeicherte Energie befindet sich nicht auf den Elektroden, sondern ist im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeichert. Ein wichtiger Begriff ist die Energie pro Volumen, die *Energiedichte*. Zur Berechnung wird die in einem bestimmten Volumen vorhandene Energie durch das Volumenelement dividiert.

$$\text{Energiedichte } w = \frac{\Delta W}{\Delta V} \quad (III.57)$$

Für einen Plattenkondensator läßt sich diese Größe unter Verwendung oben abgeleiteter Formeln einfach berechnen.

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} (Ed)^2 \quad (III.58)$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 Ad = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 V \quad (III.59)$$

Das Volumen des elektrischen Feldes im Kondensator ist $V = Ad$. Mit $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ gilt

$$\text{Energiedichte } w = \frac{1}{2}ED \quad (III.60)$$

Gleichung (III.60) gilt in dieser Form nicht nur im homogenen Feld, sondern für konstantes ϵ_r allgemein.

Energiedichte

$$w = \int EdD = \int \epsilon_0 \epsilon_r EdE = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2}ED \quad (III.61)$$

Soll in einem beliebigen inhomogenem Feld die Energiedichte berechnet werden, muß das Integral bestimmt werden.

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V ED dV \quad (III.62)$$

3.4 Laden und Entladen eines Kondensators

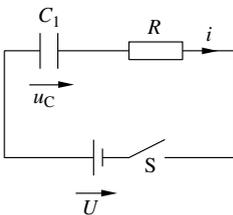


Bild III-19
Laden eines Kondensators

Wenn ein Kondensator nach Bild III-19 über einen Widerstand aufgeladen wird, vergrößert sich die Ladungsmenge auf den Kondensatorplatten und

damit die Kondensatorspannung u_C als Funktion der Zeit. Aus der

$$\text{Maschenregel } U = u_C + iR \quad (III.63)$$

folgt, daß der Strom dann kleiner werden muß. Wegen

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (III.64)$$

wird die zeitliche Änderung von u_C ebenfalls kleiner.

$$U = u_C + RC \frac{du_C}{dt} \quad (III.65)$$

Wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter S geschlossen, hat diese *Differentialgleichung* die Lösungsfunktion

$$\text{Laden eines Kondensators } u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (III.66)$$

Der Kondensator lädt sich auf die Endspannung U auf. Der Strom nimmt ab.

$$\text{Ladestrom } i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (III.67)$$

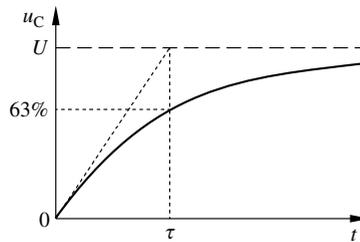


Bild III-20 Spannung am Kondensator

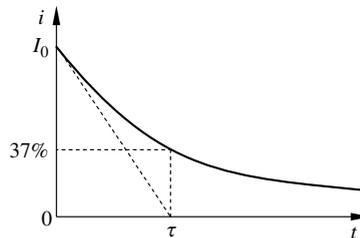


Bild III-21 Ladestrom

Der Strom I_0 ist der Strom zu Beginn des Ladevorganges, also zur Zeit $t = 0$. Er ist bestimmt durch

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (III.68)$$

Das Produkt RC hat die Dimension einer Zeit und wird *Zeitkonstante* genannt.

Zeitkonstante

$$\tau = RC \quad \begin{array}{c|c|c} \tau & R & C \\ \hline s = \Omega F & \Omega = \frac{V}{A} & F = \frac{As}{V} \end{array} \quad (III.69)$$

Diese Größe gibt an, nach welcher Zeit die Spannung auf den Wert $1 - e^{-1} = 63\%$ angestiegen ist, bzw. nach welcher Zeit der Strom auf den Wert $e^{-1} = 37\%$ gefallen ist. Der Wert für τ kann aus der grafischen Darstellung der Kondensatorspannung ermittelt werden. Er ergibt sich als Schnittpunkt der Tangente an die Spannungskurve zur Zeit $t = 0$ mit der gestrichelt gezeichneten horizontalen Geraden U (Bild III-20).

Beim Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand R nimmt die Kondensatorspannung im Lauf der Zeit ab; der fließende Strom ebenfalls. Ist der Kondensator zu Beginn auf die Spannung U aufgeladen, nimmt diese Spannung ab.

Entladen eines Kondensators

$$u_C = U e^{\frac{-t}{RC}} = U e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{III.70}$$

$$\text{Strom } i = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \tag{III.71}$$

Die in Bild III-21 dargestellte Kurve gilt in dieser Form für den Strom beim Laden und Entladen und für die Kondensatorspannung beim Entladen eines Kondensators.

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild III-22 wird der Kondensator $C = 100 \mu\text{F}$ über den Widerstand $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ aufgeladen ($R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $U_A = 100 \text{ V}$).

- a) Auf welche Endspannung lädt sich der Kondensator auf?
- b) Wie groß ist die Spannung am Kondensator nach einer Zeit von 30 ms?

Die Spannungsquelle und die beiden Widerstände können als Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand aufgefaßt werden. Die Spannung, die den Kondensator auflädt, ergibt sich aus

$$U = U_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{III.72}$$

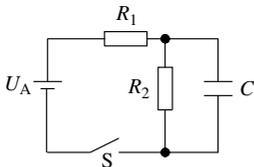


Bild III-22
Beispiel Aufladen eines Kondensators

Der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle ist

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{III.73}$$

Mit Gleichung (III.66) gilt

$$u_C = U_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \tag{III.74}$$

$$\text{mit } \tau = R_i C \tag{III.75}$$

- a) Endspannung $U = 100 \text{ V} \frac{1 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega} = 33,33 \text{ V}$
- b) $R_i = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} \text{ k}\Omega = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega$; $\tau = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 66,7 \text{ ms}$;

$$u_{30\text{ms}} = 33,33 \left(1 - e^{\frac{-30\text{ms}}{66,7\text{ms}}} \right) = 12,07 \text{ V}$$

3.5 RC-Reihenschaltung

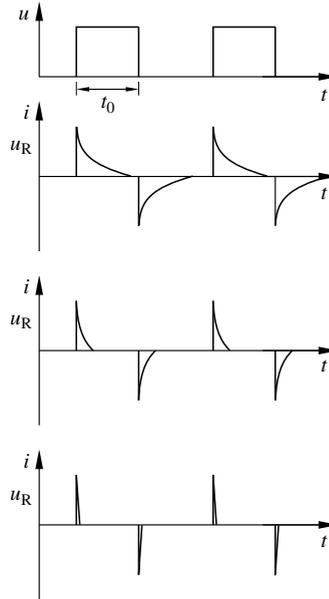


Bild III-23 Differenzieren

Legt man an eine RC-Reihenschaltung einen Rechteck-Impuls an, wird der Kondensator im gleichen Takt aufgeladen und entladen. Ist die Zeitkonstante τ ungefähr so groß wie die Impulsdauer t_0 , kann der Kondensator nicht vollständig aufgeladen werden. Der Ladestrom, und damit auch die Spannung am ohmschen Widerstand, hat einen Verlauf wie in Bild III-23 oben. Die Zeitkonstante nimmt von oben nach unten ab. Je kleiner die Zeitkonstante τ gegenüber der Impulsdauer t_0 wird, desto schneller fällt die Spannung u_R auf 0 ab. Im Grenzfall entstehen Nadelimpulse. Wird das Rechtecksignal mathematisch differenziert, entsteht das gleiche Funktionsbild. Deshalb spricht man in diesem Fall auch von einem *Differenzierglied*.

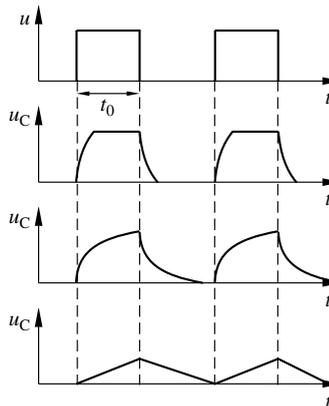


Bild III-24 Integrieren

Die Spannung u_C am Kondensator ist im Bild III-24 aufgetragen. Die Zeitkonstante τ wird hier von oben nach unten immer größer. Bei sehr großem Wert von τ

wird der Kondensator nahezu linear aufgeladen. Dies entspricht dem mathematischen Vorgang des Integrierens. Die Schaltung stellt jetzt ein *Integrierglied* dar.

IV Das Magnetische Feld

Neben den elektrischen Kräften und Feldern gibt es in der Natur auch magnetische Kräfte und Felder.

Jede sich bewegende elektrische Ladung erzeugt ein magnetisches Feld.

Jedes magnetische Feld wird durch bewegte Ladungen erzeugt.

Diese Aussage gilt für *Elektromagnete* und *Dauermagnete*. Fließt durch Elektromagnete ein Strom, ist damit eine Bewegung von Ladungen verbunden. In Dauermagneten sind die bewegten Ladungen die Elektronen, die immer um die Atomkerne kreisen und somit *Kreisströme* hervorrufen. Außerdem rotieren alle Elektronen um die eigene Achse. Diese Bewegung wird *Spin* genannt und erzeugt ebenfalls magnetische Felder. In vielen Stoffen heben sich die von den einzelnen Elektronen erzeugten Magnetfelder gegenseitig auf; in Dauermagneten nicht.

1 Feldlinien

1.1 Dauermagnet

Wie beim elektrischen Feld wird auch das Magnetfeld durch Feldlinien dargestellt. Wenn eine drehbar gelagerte Magnetnadel um einen Dauermagneten herumgeführt wird, stellt sie sich parallel zu den Feldlinien ein. Verbindet man alle Stellungen tangential, erhält man das Feldlinienbild eines Dauermagneten (Bild IV-1).

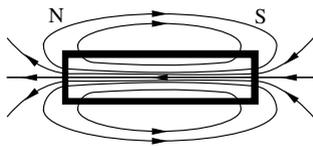


Bild IV-1
Dauermagnet

Wird ein Dauermagnet geteilt, haben beide Teile dieselben magnetischen Eigenschaften wie der Ausgangsmagnet. Es gibt also, im Gegensatz zu den elektrischen Ladungen, keine einzelne magnetische Pole, sondern nur Dipole. Magnetische Feldlinien sind daher grundsätzlich geschlossene Linien. Die magnetischen Pole werden aus historischen Gründen *Nord-* und *Südpol* genannt. Auch die Erde besitzt ein Magnetfeld. Eine Magnetnadel wird sich auch hier parallel zu den Feldlinien einstellen. Der Pol der Nadel, der in die geographische Nordrichtung zeigt, heißt Nordpol.

Sind zwei Magnete vorhanden, ziehen sich ungleiche Pole an. Die magnetischen Feldlinien werden mit Richtungspfeilen versehen. Ihre Richtung ist willkürlich festgelegt. Im Außenraum eines Dauermagneten verlaufen sie vom Nordpol zum Südpol. Da die Feldlinien immer geschlossen sind, verlaufen sie im Inneren eines Dauermagneten vom Südpol zum Nordpol.

1.2 Stromdurchflossene Leiter

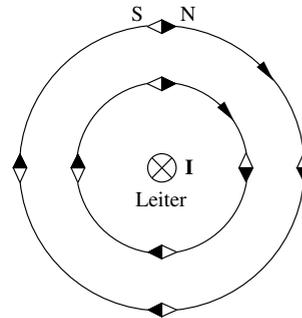


Bild IV-2
Magnetfeld um einen Leiter

Bringt man eine Magnetnadel in die Nähe eines stromdurchflossenen Leiters und führt sie um den Leiter herum, dann ergibt die tangentialen Verbindung aller Einstellungen Kreise, in deren Zentrum der Leiter liegt. Die technische Stromrichtung ist durch das Kreuz angegeben, sie zeigt in die Zeichenebene hinein. Die Richtung der Feldlinien kann durch die *Rechtsschrauben-Regel* beschrieben werden.

Dreht man eine rechtsgängige Schraube so, daß sie sich in der technischen Stromrichtung weiterbewegt, ist die Richtung der magnetischen Feldlinien durch die Drehrichtung gegeben.

Diese Richtung läßt sich auch mit Hilfe der rechten Hand bestimmen.

Der Daumen der rechten Hand wird in Richtung der technischen Stromrichtung gehalten. Die gekrümmten Finger zeigen dann die Richtung der Magnetfeldlinien an.

1.3 Stromdurchflossene Spule

Wenn stärkere Magnetfelder erzeugt werden sollen, werden *Spulen* verwendet. Wird ein Leiter auf einen zylindrischen Spulenkörper gewickelt, erhält man eine *Zylinderspule*. Jeder Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Zwischen den Leitern heben sich die von den

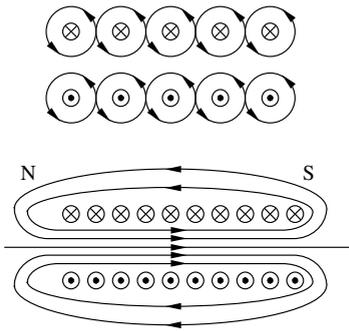


Bild IV-3 Zylinderspule

einzelnen Leitern erzeugten Felder gegenseitig auf. Im Außenraum und im Inneren der Spule addieren sich die einzelnen Beiträge zum Gesamtfeld. Das in der Mitte der Spule entstehende Feld ist dann die Vektorsumme aller einzelnen Felder. In der Mitte der *Zylinderspule* kann das Feld bei großer Spulenlänge als homogen angesehen werden. Im Außenraum ist das Feldlinienbild gleich dem eines Dauermagneten. Man kann einer *Zylinderspule* somit auch einen Nordpol und einen Südpol zuordnen.

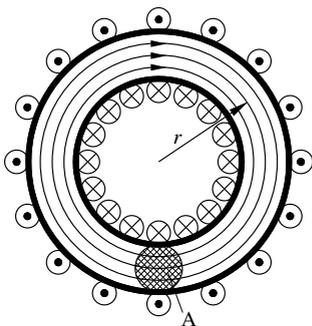


Bild IV-4 Ringspule

Wird der zylindrische Spulenkörper zu einem Kreis gebogen, entsteht eine *Ringspule*. Das hier aus der Überlagerung aller einzelnen Magnetfelder entstehende resultierende Feld hat die Eigenschaft, nur im Inneren des Spulenkerns vorhanden zu sein. Es gibt keine Stelle, an der die Feldlinien, die ja geschlossene Linien darstellen, austreten können.

1.4 Magnetfeld der Erde

Die Erde besitzt ein Magnetfeld. Eine Magnetnadel zeigt in die Richtung zum magnetischen Pol. Da der Nordpol der Magnetnadel in die geographische Nordrichtung zeigt, andererseits aber zum magnetischen Südpol weist, liegt der magnetische Südpol auf der Nordhalbkugel. Er befindet sich bei ungefähr 74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge nordwestlich von Nordgrönland. Der magnetische Nordpol auf der Südhalbkugel liegt nicht genau gegenüber. Er liegt bei ungefähr 72° südlicher Breite und 155°

östlicher Länge in der Antarktis (Bild IV-5). Die Abweichung des Erdmagnetfeldes von der geographischen Nord-Süd-Richtung ist die *Deklination*; sie ist abhängig vom Ort auf der Erde. In Deutschland beträgt diese Abweichung etwa 2° in westlicher Richtung. Die Feldlinien verlaufen – bis auf die Äquatorgegend – nicht parallel zur Erdoberfläche. Die Neigung zur Horizontalen wird *Inklination* genannt.

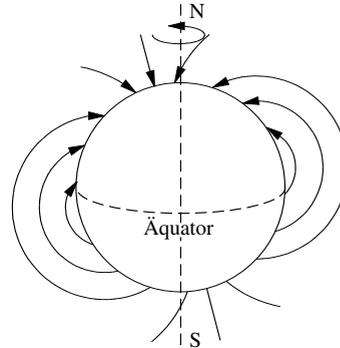


Bild IV-5 Magnetfeld der Erde

Das Magnetfeld der Erde ist nicht so symmetrisch, wie in Bild IV-5 dargestellt. Durch Satellitenmessungen ist bekannt, daß das Magnetfeld durch den *Sonnenwind* stark deformiert wird. Der *Sonnenwind* besteht aus Wasserstoff- und Heliumionen sowie aus Elektronen. Diese Teilchen treffen mit einigen 100 km/s die Erde. Dadurch wird das Magnetfeld auf der Tagseite stark zusammengedrückt, auf der Nachtseite der Erde wird das Magnetfeld zu einem langen Schweif deformiert, der bis über die Mondbahn hinaus geht.

Die Ursache für das Erdmagnetfeld ist nicht genau bekannt. Wahrscheinlich rührt es von der Bewegung des ionisierten flüssigen Erdkerns her. Das Erdmagnetfeld ist in seiner Stärke und seiner Richtung nicht konstant. Vor etwa 4 Millionen Jahren war die Polarität entgegengesetzt. Dies kann aus der Richtung der Magnetisierung in alten Gesteinen festgestellt werden.

2 Magnetische Grundgrößen

2.1 Feldstärke

Bringt man in die Nähe eines stromdurchflossenen Leiters eine Magnetnadel und stellt sie senkrecht zur Richtung der Feldlinien, die wie konzentrische Kreise um den Leiter liegen, so wird die Nadel durch die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld in Richtung der Magnetlinien gedreht. Es wird also ein Drehmoment M ausgeübt. Die Größe von M ist ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Dieses wird mit H bezeichnet

$$M \sim H \tag{IV.1}$$

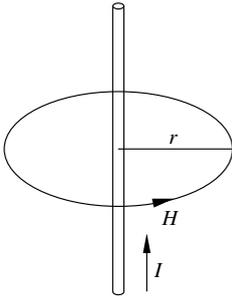


Bild IV-6
Magnetfeld um einen Leiter

Erhöht man den Strom I im Leiter, erhöht sich auch das Drehmoment und somit die Feldstärke

$$H \sim I \tag{IV.2}$$

Werden n Leiter verwendet, hängt die Stärke des Drehmomentes von allen Strömen ab:

$$H \sim \sum_{i=1}^n I_i \tag{IV.3}$$

Die Summe aller Ströme, die von einer geschlossenen Feldlinie umgeben sind, ist die *Durchflutung*.

$$\text{Durchflutung } \Theta = \sum_{i=1}^n I_i \quad \frac{\Theta}{\text{A}} \frac{I}{\text{A}} \tag{IV.4}$$

Zur Berechnung von Feldstärken kann das *Durchflutungsgesetz* benutzt werden.

Ist die Feldstärke nicht konstant, gilt für die Durchflutung:

$$\Theta = \oint \vec{H} d\vec{s} \tag{IV.5}$$

$$\text{Durchflutungsgesetz } \oint \vec{H} d\vec{s} = \sum_{i=1}^n I_i \tag{IV.6}$$

Für den Sonderfall einer konstanten Feldstärke ist

$$\sum_{i=1}^n I_i = H \cdot l \tag{IV.7}$$

Der Weg l muß dabei geschlossen sein.

Zur Berechnung des Feldes in einer Ringspule nach Bild IV-4 wird der mittlere Radius r gewählt. Der geschlossene Weg ist dann $l = 2\pi r$ und es gilt:

$$\text{Feld in einer Ringspule } H = \frac{IN}{2\pi r} \tag{IV.8}$$

Dieses Feld ist nicht konstant, sondern fällt nach außen mit $1/r$ ab. Ist jedoch der mittlere Radius groß gegenüber dem Windungsdurchmesser d , kann H innerhalb des Ringquerschnittes als konstant angenommen werden.

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung von Gleichung (IV.6) ist die Berechnung des Magnetfeldes um einen geraden stromdurchflossenen Leiter. Das Magnetfeld ist auf Kreisbahnen um den Leiter konstant. Der nach dem Durchflutungsgesetz geforderte geschlossene Weg mit konstanter Feldstärke muß gleich dem Umfang eines Kreises sein. Es fließt nur ein Strom I . Nach Gleichung (IV.6) gilt

$$H \cdot 2\pi r = I \tag{IV.9}$$

$$\text{Feld um einen Leiter } H = \frac{I}{2\pi r} \tag{IV.10}$$

■ **Beispiel:** Ein massiver Kupferleiter ist nach Bild IV-7 von einem Kupferrohr umschlossen. Diese Anordnung dient als Hin- und Rückleitung. In beiden Leitern fließt der gleiche Strom $I = 100$ A. Wie groß ist die Feldstärke als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt?

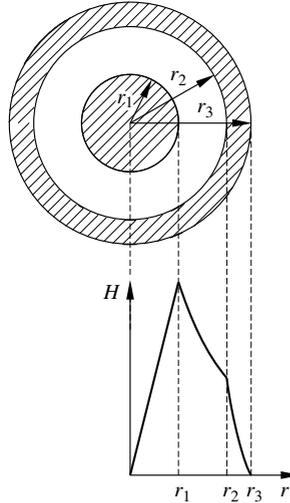


Bild IV-7 Beispiel Magnetfeld um konzentrische Doppelleiter

Zunächst wird der Bereich $0 < r < r_1$ betrachtet. Die Stromdichte S ist überall konstant.

$$\text{Stromdichte } S_1 = \frac{I}{\pi \cdot r_1^2} ;$$

$$\text{Durchflutung } \Theta = S_1 \cdot \pi r^2$$

Das Feld in einem beliebigen Abstand r wird mit dem Durchflutungsgesetz berechnet.

$$H = \frac{\Theta}{2\pi r} = \frac{S_1 \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{I \cdot \pi r^2}{\pi r_1^2 \cdot 2\pi r} = \frac{Ir}{2\pi r_1^2} \tag{IV.11}$$

H nimmt linear mit r zu. Für $r = r_1$ ist die Grenze dieses Bereiches erreicht.

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,01 \text{ m}} = 1591 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Im Bereich $r_1 < r < r_2$ kommt kein weiterer Strom hinzu, die Durchflutung bleibt konstant ($\Theta = I$). H nimmt nach Gleichung (IV.10) mit $1/r$ ab bis zum Wert

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r_2} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,02 \text{ m}} = 795 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Im Bereich $r_2 < r < r_3$ nimmt die Durchflutung wieder ab.

$$\Theta = \Theta_1 - I \frac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \tag{IV.12}$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} \cdot \left(I - I \frac{(r^2 - r_2^2)}{(r_3^2 - r_2^2)} \right) \tag{IV.13}$$

Für Abstände $r > r_3$ ist die Feldstärke $H = 0$. Die Abhängigkeit der Feldstärke vom Abstand ist in Bild IV-7 unten aufgetragen.

Soll das Feld in einer Zylinderspule berechnet werden, ist kein geschlossener Weg zu finden, auf dem die Feldstärke konstant ist. Der für die Berechnung notwendige geschlossene Weg wird in einzelne Stücke aufgeteilt. Auf diesen ist entweder H konstant, oder Beiträge von verschiedenen Wegelementen kompensieren sich. Wird der Umlaufweg nach Bild IV-8 gelegt, gilt für die einzelnen Wegabschnitte:

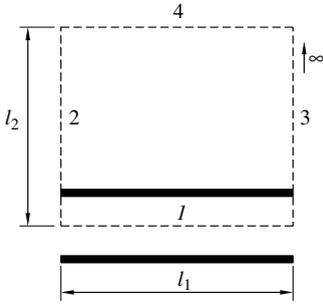


Bild IV-8 Feld in einer Spule

Auf dem Teilstück 1 ist das Feld konstant und gleich dem gesuchten Feld, $H = \text{const}$.

Alle Beiträge, die auf dem Teilstück 2 entstehen, werden durch entgegengesetzte Beiträge auf dem Teilstück 3 kompensiert. Das Teilstück 4 ist soweit entfernt gedacht, daß dort $H = 0$ gilt. Das Wegintegral aus Gleichung (IV.6) ergibt dann

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 = H_1 \cdot l_1 \quad (IV.14)$$

Wird die Windungszahl mit N bezeichnet, so ist die Durchflutung

$$\Theta = NI \quad (IV.15)$$

Feld in einer Zylinderspule $H = \frac{\Theta}{l} = \frac{NI}{l} \quad (IV.16)$

In den Randbereichen der Spule ist allerdings das Feld H_r nicht konstant. Damit Gleichung (IV.16) trotzdem angewendet werden kann, muß die Spulenlänge groß sein gegenüber dem Durchmesser der Spule. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, liegt also eine kurze Spule vor, ist das Feld nicht homogen und muß auf andere Weise ausgerechnet werden. Der Durchmesser der Spulenwicklung ist d , die Länge l .

kurze Zylinderspule $H_{\text{Mitte}} = \frac{NI}{\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (IV.17)$

$$H_{\text{Rand}} = \frac{NI}{2\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (IV.18)$$

Wenn $l \gg d$ ist, kann d im Nenner von Gleichung (IV.17) vernachlässigt werden und es folgt Gleichung (IV.16).

Das Gesetz, nach dem Magnetfelder bei beliebiger Leitergeometrie zu berechnen sind, ist das *Biot-Savartsche Gesetz*. Jedes Teilstück ds eines stromdurchflossenen Leiters, durch den der Strom I fließt, trägt zum Feld in einem beliebigen Punkt P bei. Der Beitrag eines Teilstückes ds im Punkt Q ist

Biot-Savartsche Gesetz $dH = \frac{I \cdot ds}{4\pi r^2} \sin \alpha \quad (IV.19)$

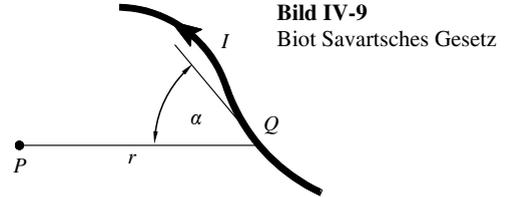


Bild IV-9
Biot Savartsches Gesetz

Um das gesamte Feld im Punkt P zu bestimmen, müssen alle einzelnen Beiträge zusammengefaßt werden. Ist ein Leiter zum Beispiel zu einem Kreis gebogen, läßt sich das Magnetfeld genau im Mittelpunkt mit Gleichung (IV.19) berechnen. Für jedes Leiterelement ds gilt $\alpha = 90^\circ$ und $\sin \alpha = 1$. Der Abstand zum Punkt P (Zentrum) ist überall gleich. Die Gesamtlänge der Strombahn ist $2\pi r$.

Zentrum eines Kreisstromes

$$H = \oint dH = \frac{I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{I}{2r} \quad (IV.20)$$

Für einen Punkt P auf der Mittelpunktsachse ist die Berechnung etwas komplizierter.

$$H = \frac{I}{2R} \sin^3 \beta \quad (IV.21)$$

mit $\sin \beta = \frac{R}{r}, r = \sqrt{R^2 + l^2}$

Achse eines Kreisstromes

$$H = \frac{IR^2}{2(\sqrt{R^2 + l^2})^3} \quad (IV.22)$$

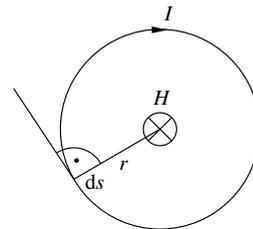


Bild IV-10
Feld im Zentrum eines Kreisstromes

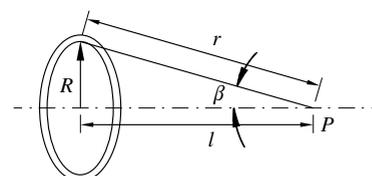


Bild IV-11 Feld auf der Achse eines Kreisstromes

- Beispiel:** Zwei parallel stromdurchflossene Leiter mit einem Abstand von $a = 45 \text{ mm}$ führen nach Bild IV-12 die Ströme $I_1 = 90 \text{ A}$, $I_2 = 70 \text{ A}$. Der angegebene Punkt P ist von den Leitern $b = 50 \text{ mm}$, $c = 30 \text{ mm}$ entfernt. Wie groß ist die Feldstärke im Punkt P ? Welche Richtung hat sie zur Verbindungslinie der beiden Leiter?

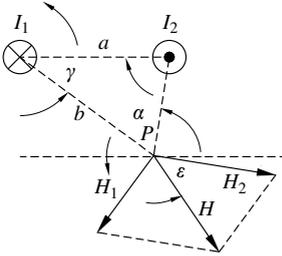


Bild IV-12 Beispiel Magnetfeld von 2 Leitern

Die von den einzelnen Strömen erzeugten Magnetfelder stehen senkrecht auf den jeweiligen Verbindungslinien zum Punkt P . Die Beträge berechnen sich nach Gleichung (IV.10).

$$H_1 = \frac{90 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ m}} = 286,5 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_2 = \frac{70 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,03 \text{ m}} = 371,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Diese Komponenten können im entsprechenden Maßstab unter dem richtigen Winkel gezeichnet werden. Das resultierende Feld kann aus der Zeichnung abgelesen werden zu $H = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Der

gesuchte Winkel kann ebenfalls abgelesen werden: $\epsilon = 56^\circ$. Soll die Lösung rechnerisch gefunden werden, müssen zunächst die Winkel im Dreieck PI_1I_2 berechnet werden. Dies kann durch die Anwendung von Sinus- und Kosinussatz erfolgen.

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0,805;$$

$$\gamma = 36,37^\circ; \quad \alpha = 62,73^\circ, \quad \beta = 80,9^\circ$$

Der Winkel zwischen H_1 und H_2 ist $180 - \alpha = 117,3^\circ$, für die resultierende Feldstärke H gilt

$$H = \sqrt{286,5^2 + 371,4^2 - 2 \cdot 286,5 \cdot 371,4 \cdot \cos 62,73^\circ} = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Für den Winkel zwischen H und H_2 gilt

$$\sin \varphi = \frac{286,5}{350} \cdot \sin 62,73^\circ; \quad \varphi = 46,7^\circ$$

$$\epsilon = (90^\circ - 80,94^\circ) + 46,7^\circ = 55,76^\circ$$

2.2 Fluß, Flußdichte

Die Gesamtheit aller Feldlinien nennt man den *magnetischen Fluß* Φ . Diese Größe kann gemessen werden, indem eine geschlossene Leiterschleife aus dem Magnetfeld herausgezogen wird. Während der Bewegung der Leiterschleife entsteht zwischen den Punkten A und B eine zeitlich veränderliche Spannung. Die Fläche unter der Spannungskurve wird als *Spannungsstoß* bezeichnet (Bild IV-13).

Dieser Spannungsstoß wird proportional zur Flußänderung $\Delta\phi$ durch die Leiterschleife gesetzt. Der magnetische Fluß wird in *Weber* (Wb) gemessen.

$$\text{Fluß } \phi = \int u dt \quad \frac{\phi}{\text{Wb} = \text{Vs}} \Big| \frac{U}{\text{V}} \Big| \frac{t}{\text{s}} \quad (\text{IV.23})$$

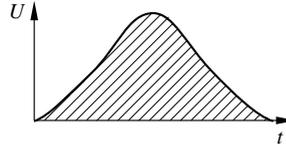
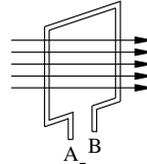


Bild IV-13 Spannungsstoß

Wird der Fluß auf eine Flächeneinheit bezogen, ergibt sich die *Flußdichte* B .

$$\text{Flußdichte } B = \frac{\phi}{A_n} \quad \frac{B}{\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \Big| \frac{\phi}{\text{Vs}} \Big| \frac{A}{\text{m}^2} \quad (\text{IV.24})$$

Die Einheit ist 1 *Tesla*.

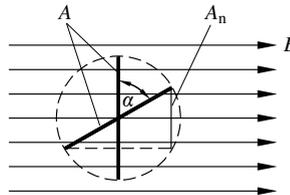


Bild IV-14 Magnetischer Fluß

Die Fläche A_n ist dabei die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche. Steht das Magnetfeld nicht senkrecht auf der Fläche, gilt nach Bild IV-14

$$A_n = A \cdot \cos \alpha \quad (\text{IV.25})$$

Zwischen der magnetischen Flußdichte und der magnetischen Feldstärke gilt im Vakuum die Beziehung

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{IV.26})$$

Die Konstante μ_0 ist die magnetische Feldkonstante oder auch Permeabilität des Vakuums.

magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (\text{IV.27})$$

- Beispiel:** Eine lange Zylinderspule wird von einem Strom I durchflossen. Wie groß sind das magnetische Feld und die Flußdichte im Inneren der Spule ($N = 1000$, $I = 5 \text{ A}$, $l = 1 \text{ m}$)?

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{1000 \cdot 5 \text{ A}}{1 \text{ m}} = 5000 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5000 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Die elektrische Feldkonstante und die magnetische Feldkonstante bestimmen die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (IV.28)

Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt entsprechend der SI Definition (s. Physik I.2)

$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Somit läßt sich hieraus die elektrische Feldkonstante bestimmen zu

$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \mu_0} = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ (IV.29)

3 Kräfte im Magnetfeld

3.1 Kräfte auf bewegliche Ladungsträger

Im Gegensatz zu elektrischen Feldern, in denen auf Ladungen immer eine Kraft ausgeübt wird, werden im Magnetfeld Kräfte nur auf bewegte Ladungen ausgeübt. Sie dürfen sich dabei nicht parallel zu den magnetischen Feldlinien bewegen.

Lorentzkraft $F_L = qvB \cdot \sin \varphi$ (IV.30)

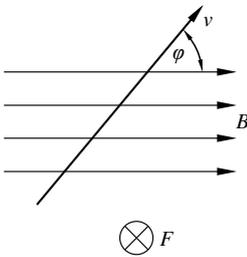


Bild IV-15 Lorentzkraft

Der Winkel φ ergibt sich aus der Richtung der Geschwindigkeit v und der Richtung des Magnetfeldes B . Mit dieser Gleichung läßt sich nur der Betrag der Lorentzkraft berechnen. Die Richtung kann mit Hilfe der *Drei-Finger-Regel* der rechten Hand bestimmt werden. Die drei Finger werden rechtwinklig zueinander gestellt.

Der Daumen zeigt in Richtung der Geschwindigkeit, der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes und der Mittelfinger bei positiver Ladung in Richtung der Kraft; bei negativer Ladung entgegengesetzt zur Kraft.

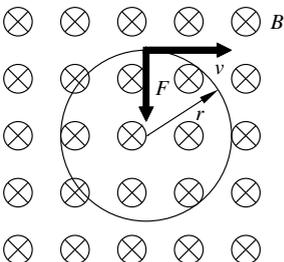


Bild IV-16 Kreisbahn unter dem Einfluß der Lorentzkraft

Die drei Vektoren \vec{v} , \vec{B} und \vec{F} stehen alle senkrecht aufeinander. Bewegt sich ein Elektron (negative Ladung) in einem Magnetfeld nach Bild IV-16, stehen die Feldlinien immer senkrecht auf dem Vektor der Geschwindigkeit des Elektrons. Damit muß auch die Kraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit stehen. Der Kraftvektor liegt immer in der Zeichenebene. Die Bewegung des Elektrons unter dem Einfluß einer zu jedem Zeitpunkt senkrecht stehenden Kraft ist eine Kreisbahn. Die Kraft ist dann zum Mittelpunkt gerichtet, die Richtung der momentanen Geschwindigkeit ist die Tangente an den Kreis. Der Radius der Kreisbahn ergibt sich aus der Überlegung, daß die Zentrifugalkraft gleich der Lorentzkraft ist.

$\frac{mv^2}{r} = e_0 v B$ (IV.31)

$r = \frac{mv}{e_0 B}$ (IV.32)

3.2 Stromdurchflossener Leiter

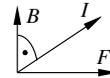
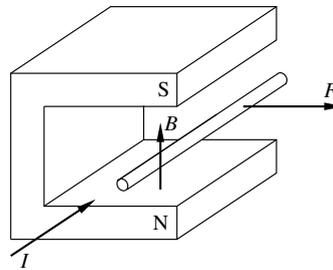


Bild IV-17 Kraft auf Leiter im Magnetfeld

Auch in einem stromdurchflossenen Leiter werden Ladungen bewegt. Bringt man diesen Leiter in ein äußeres Magnetfeld, wird auch hier eine Kraft auf die Ladungen und damit auf den Leiter ausgeübt. Da die Ladungen negativ sind und die technische Stromrichtung der tatsächlichen Richtung der Elektronenbewegung entgegengesetzt ist, heben sich beide negativen Vorzeichen auf. Die Richtung der Kraft kann mit der Drei-Finger-Regel bestimmt werden.

Zeigt der Daumen in Stromrichtung und der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes, dann gibt der Mittelfinger die Krafrichtung an.

Die Ermittlung der Krafrichtung ist auch unter dem Namen *Motorregel* bekannt. Hier wird allerdings die *linke Hand* benutzt. Sie wird so in das Magnetfeld gehalten, daß die magnetischen Feldlinien in die Innenfläche der linken Hand eintreten und die Fingerspitzen in Stromrichtung zeigen. Der abgespreizte Daumen zeigt dann die Krafrichtung an.

Das Magnetfeld des Dauermagneten und das durch den Strom im Leiter erzeugte Magnetfeld überlagern

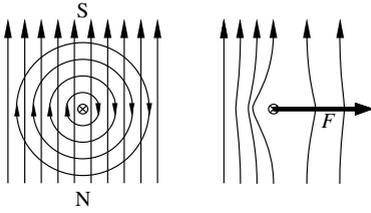


Bild IV-18 Resultierendes Feld um einen Leiter

sich. Auf der linken Seite von Bild IV-18 sind das durch den stromführenden Leiter und das durch den Dauermagneten erzeugte Feld gezeichnet, rechts das daraus entstehende resultierende Feld. Die Richtung der Kraft auf den Leiter ist aus diesem Feldlinienbild zu entnehmen. Die Kraft ist immer zu kleineren Feldstärken, also zu weiter auseinander liegenden Feldlinien, gerichtet. Die Größe der Kraft hängt neben der Flußdichte B und der Stromstärke I auch noch von der Länge des Leiters l im Magnetfeld und vom Winkel, den der Leiter mit den Magnetfeldlinien einschließt, ab. Dies folgt direkt aus Gleichung (IV.30).

$$\text{Kraft im Magnetfeld } F = I l B \sin \varphi \quad (IV.33)$$

Die Kraft wirkt immer senkrecht zu der Fläche, die durch das Magnetfeld und die Stromrichtung definiert wird. Sind Leiter und Magnetfeld senkrecht zueinander, dann ist die Kraft

$$F = I l B \quad (IV.34)$$

3.3 Magnetisches Moment

In einem äußeren Magnetfeld wird auf einen weiteren Magneten ein Drehmoment ausgeübt. Eine Magnetnadel wird sich in Richtung der Feldlinien einstellen. Der Quotient aus Drehmoment und Flußdichte wird *magnetisches Moment* genannt.

magnetisches Moment

$$|m| = \frac{|M|}{|B|} \quad \frac{m}{\text{Am}^2} \quad \frac{M}{\text{Nm} = \text{VAs}} \quad \frac{B}{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \quad (IV.35)$$

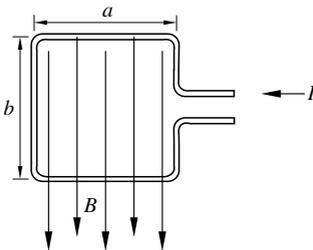


Bild IV-19 Leiterschleife im Magnetfeld

Das magnetische Moment ist ein Vektor, der vom Süd- zum Nordpol zeigt. Eine vom Strom durchflossene Spule erfährt in einem Magnetfeld ein Drehmo-

ment, das versucht, die Schleifenfläche senkrecht zu den Magnetfeldlinien zu stellen. Die rechteckige Leiterschleife und das Magnetfeld sind in Bild IV-19 dargestellt. Die Kantenlänge b liegt parallel zum Feld B , daher wird auf diesen Teil des Leiters keine Kraft ausgeübt. Auf die Rechteckseiten der Länge a wirken gleichgroße, entgegengesetzte Kräfte $F = I b a$. Die Schleife dreht sich um die Achse bei $b/2$.

Drehmoment

$$M = 2 \cdot I \cdot B \cdot a \cdot \frac{b}{2} = I \cdot B \cdot a \cdot b = I \cdot B \cdot A \quad (IV.36)$$

$$\text{magnetisches Moment } m = \frac{M}{B} = I \cdot A \quad (IV.37)$$

3.4 Kräfte zwischen zwei parallelen Leitern

Befindet sich ein stromführender Leiter in einem Magnetfeld, welches durch einen anderen Leiter hervorgerufen wird, muß auf den Leiter ebenfalls eine Kraft ausgeübt werden. Das Magnetfeld am Ort von Leiter 2 ist nach Gleichung (IV.10) und Bild IV-20:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi d} \quad (IV.38)$$

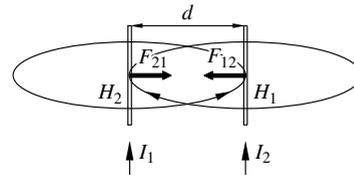


Bild IV-20 Kräfte zwischen zwei Leitern

Mit Gleichung (IV.34) gilt für die Kraft auf den Leiter 2, die durch das Magnetfeld des Leiters 1 hervorgerufen wird:

$$F_{12} = \mu_0 H_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \quad (IV.39)$$

Die Richtung dieser Kraft kann nach der *Rechte-Hand-Regel* bestimmt werden und ist in Bild IV-20 eingezeichnet. Durch das Magnetfeld des Leiter 2 wird am Ort des Leiters 1 ein Magnetfeld

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi d} \quad (IV.40)$$

erzeugt. Hierdurch wird nach der gleichen Überlegung die Kraft

$$F_{21} = \mu_0 H_2 I_1 l = \frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d} \quad (IV.41)$$

ausgeübt.

Die Beträge sind gleich, die Richtungen entgegengesetzt. Es gilt die Aussage:

Zwei parallele vom Strom in gleichen Richtungen durchflossene Leiter ziehen sich an.

Die von beiden Strömen hervorgerufenen Magnetfelder überlagern sich.

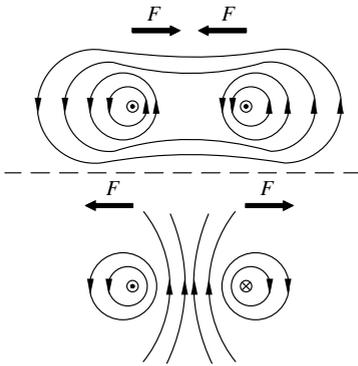


Bild IV-21 Feldlinien um zwei Leiter

Zwischen den beiden Leitern sind die Richtungen der Feldlinien entgegengesetzt, das resultierende Feld wird hier geschwächt. Sind beide Ströme gleich groß, verschwindet das Feld genau in der Mitte. Die Kraft wirkt in Richtung des schwächeren Magnetfeldes. Die beiden Leiter ziehen sich also an. Sind die Stromrichtungen in beiden Leitern entgegengesetzt, wird das resultierende Feld zwischen den Leitern verstärkt. Die Kräfte sind jetzt so gerichtet, daß sich beide Leiter abstoßen.

Zwei parallele vom Strom in entgegengesetzten Richtungen durchflossene Leiter stoßen sich ab.

3.5 Hall-Effekt

Wird ein leitendes Plättchen in ein senkrecht zu seiner Oberfläche stehendes Magnetfeld gebracht und eine Spannungsquelle nach Bild IV-22 angeschlossen, fließt im Plättchen ein Strom in der angegebenen Richtung. Auf diese bewegten Ladungsträger wird durch das senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Magnetfeld die Lorentzkraft nach Gleichung (IV.30) ausgeübt. Bei der angegebenen Anordnung wird auf die Ladungsträger eine solche Kraft ausgeübt, daß die negativen Ladungsträger zur Oberseite des Plättchens abgelenkt werden und somit an der Unterseite ein Überschuß an positiven Ladungen entsteht. Durch die Ladungstrennung wird ein elektrisches Feld zwischen Ober- und Unterseite aufgebaut. Es entsteht die *Hallspannung* U_H . Im Gleichgewicht sind die Lorentzkraft und die durch das elektrische Feld auf die Ladungen wirkende Kraft entgegengesetzt gleich groß.

$$F_{Ly} = -ev_x B_z \tag{IV.42}$$

$$F_{cl} = -eE = -e \frac{U_H}{d} \tag{IV.43}$$

$$U_H = d v_x B_z \tag{IV.44}$$

Mit Gleichung (I.9) ist

$$v_x = \frac{I}{neA} = \frac{I}{nebd} \tag{IV.45}$$

$$\text{Hallspannung } U_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{dIB}{bd} = R_H \cdot \frac{IB}{b} \tag{IV.46}$$

$$\text{Hall-Koeffizient } R_H = \frac{1}{ne} \quad \begin{array}{c|c|c} R_H & n & e \\ \hline \frac{\text{m}^3}{\text{As}} & \frac{1}{\text{m}^3} & \text{As} \end{array} \tag{IV.47}$$

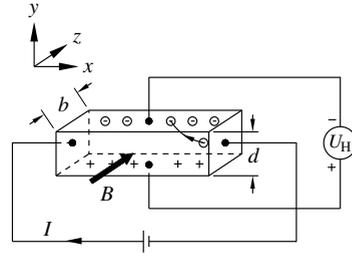


Bild IV-22 Hall-Effekt

Tabelle IV-1 Hall-Koeffizienten

Werkstoff	$R_H / 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$
Cu	-5.5
Al	-3.6
Ag	-9.0
Au	-7.5
Cd	+6.0
Sn	+14.0
InAs	-10^{-7}

Durch Messung dieser Größe können die Ladungsträgerdichte und die Art des Leitungsmechanismus (Elektronen oder Löcherleitung) bestimmt werden. Sind die Ladungsträger Elektronen, ist der Hall-Koeffizient negativ; bei Löcherleitung ist er positiv. Da die Hallspannung direkt proportional zur Flußdichte B ist, werden *Hall-Sonden* zur Messung von Magnetfeldern verwendet. Bei bekannter Geometrie und bekanntem Strom und konstantem Strom durch die Hallsonde ist die Hallspannung proportional zum Magnetfeld.

Eine weitere Anwendung findet der *Hallgenerator* in der Meßtechnik. Er wird dann eingesetzt, wenn das Produkt zweier Größen gemessen werden soll. In Bild IV-23 ist die Prinzip-Schaltung angegeben. Der Strom I_H wird durch die Verbraucherspannung U festgelegt. Dabei muß dieser Strom klein gegen den Strom durch den Verbraucher gehalten werden. Dies wird durch den geeigneten Vorwiderstand R_V erreicht. Der Strom durch den Verbraucher wird durch

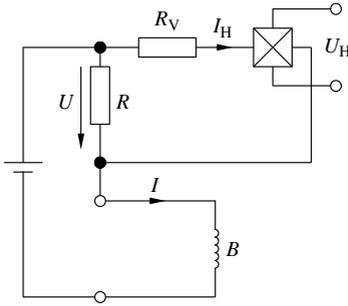


Bild IV-23
Hallgenerator

eine in Reihe geschaltete Spule geschickt, die das für den Halleffekt erforderliche Magnetfeld erzeugt. Die Hallspannung ist proportional zum Produkt aus Strom und Spannung des Verbrauchers, also auch zu seiner Leistung

$$U_H \sim I_H \cdot B \sim U \cdot I \sim P. \tag{IV.48}$$

Der Hallgenerator ist im Prinzip eine Multiplizierschaltung für zwei Ströme. Zur Leistungsmessung muß ein Strom als Meßgröße an Stelle der Verbraucherspannung genommen werden.

4 Energie des Magnetfeldes

Analog zu Gleichung (III.61) gilt im Falle eines Magnetfeldes für die Energiedichte

$$\text{Energiedichte } w = \int HdB \tag{IV.49}$$

Wenn der Zusammenhang zwischen Flußdichte B und Feldstärke H nicht linear ist, kann dieses Integral nicht in einfacher Weise berechnet werden.

5 Materie im Magnetfeld

Wird Materie in ein magnetisches Feld gebracht, ändert sich, analog zur Materie im elektrischen Feld, die Flußdichte B . Diese Änderung wird relativ zur Flußdichte im Vakuum angegeben.

$$\text{relative Permeabilität } \mu_r = \frac{B_M}{B_0} = \frac{B_M}{\mu_0 H_0} \tag{IV.50}$$

$$\text{Induktionsflußdichte } B_M = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 \tag{IV.51}$$

Die dimensionslose Zahl μ_r ist die *relative magnetische Feldkonstante* oder *relative Permeabilität*. Die durch die Materie zusätzlich hervorgerufene Flußdichte ist die

$$\text{magnetische Polarisation } J = B_M - B_0 \tag{IV.52}$$

$$J = (\mu_r - 1) B_0 = (\mu_r - 1) \mu_0 H_0 \tag{IV.53}$$

$$\text{magnetische Suszeptibilität } \chi_M = (\mu_r - 1) \tag{IV.54}$$

$$J = \chi_M B_0 = \chi_M \mu_0 H_0 \tag{IV.55}$$

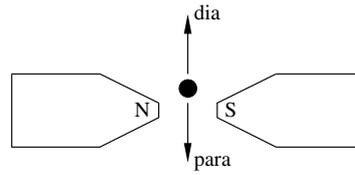


Bild IV-24 Messung der Suszeptibilität

Die *magnetische Suszeptibilität* kann gemessen werden, indem der zu untersuchende Stoff in ein inhomogenes Magnetfeld gebracht wird. Stoffe mit negativer Suszeptibilität werden zu Orten geringerer Feldstärke herausgedrückt, Stoffe mit positiver Suszeptibilität zu Orten größerer Feldstärke gezogen.

Die magnetische Polarisation gibt die Änderung der magnetischen Flußdichte an. Die Änderung der magnetischen Feldstärke wird durch die *Magnetisierung* M beschrieben.

$$\text{Magnetisierung } M = H_M - H_0 \tag{IV.56}$$

$$M = \frac{B_M}{\mu_0} - H_0 \tag{IV.57}$$

$$M = \mu_r H_0 - H_0 = (\mu_r - 1) H_0 \tag{IV.58}$$

$$M = \chi_M H_0 \tag{IV.59}$$

$$\text{Polarisation } J = \mu_0 M \tag{IV.60}$$

Die Magnetisierung ist bei vielen Stoffen proportional zur magnetischen Feldstärke H und somit ist für diese Stoffe χ_M konstant. Ausnahme hiervon bilden die nichtlinearen magnetischen Werkstoffe, wie z.B. die ferromagnetischen Werkstoffe. Nach ihrem Verhalten in Magnetfeldern werden Werkstoffe in die in der Tabelle IV-2 aufgeführten Hauptklassen eingeteilt.

Tabelle IV-2 Einteilung magnetischer Werkstoffe

dia- magnetisch	$\mu_r < 1, \chi_M < 0$	$-10^{-4} < \chi_M < -10^{-9}$
para- magnetisch	$\mu_r > 1, \chi_M > 0$	$10^{-6} < \chi_M < 10^{-2}$
ferro- magnetisch	$\mu_r \gg 1, \chi_M \gg 1$	$\mu_r > 500$

Das unterschiedliche Verhalten der Materie im Magnetfeld ist auf die Elektronenstruktur und die damit verbundenen magnetischen Momente zurückzuführen. Jedes Elektron erzeugt durch seine Bewegung magnetische Momente. Es gibt zwei unterschiedliche Bewegungen der Elektronen, die magnetische Momente erzeugen. Zum einen ist es die Bewegung um den Atomkern. Hierdurch wird das *magnetische Bahnmoment* erzeugt. Zum anderen rotiert das Elektron um seine eigene Achse. Diese Rotation wird *Spin* genannt. Durch diese Rotation entsteht das

magnetische Spinnmoment. In jedem Stoff liegt eine Überlagerung von Bahnmoment und Spinnmoment vor. Die Magnetisierung M ergibt sich als Summe aller magnetischen Momente.

Ein auf einer Kreisbahn um den Atomkern kreisendes Elektron kann als kreisförmiger Strom betrachtet werden, da Ladung transportiert wird. Bei einer Umlaufzeit T ist dieser

$$\text{Kreisstrom } I = \frac{e_0}{T} = \frac{\omega e_0}{2\pi} \quad (\text{IV.61})$$

Das magnetische Moment dieses Kreisstromes ist nach Gleichung (IV.37):

magnetisches Moment

$$m_B = IA = \frac{\omega e_0 \pi r^2}{2\pi} = \frac{e_0 \omega r^2}{2} \quad (\text{IV.62})$$

In der Quantenmechanik der Physik wird gezeigt, daß die Beziehung

$$m_{\text{el}} \omega r^2 = \frac{h}{2\pi} \quad (\text{IV.63})$$

gilt, mit der Naturkonstanten h , dem Planckschen Wirkungsquant und der Elektronenmasse m_{el} . Gleichung (IV.62) kann hiermit umgeformt werden zu

$$\text{Bohrsches Magneton } m_B = \frac{e_0 h}{4\pi m_{\text{el}}} \quad (\text{IV.64})$$

$$m_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (\text{IV.65})$$

Je nach Anordnung und Eigenschaften der magnetischen Momente in der Materie reagiert diese in unterschiedlicher Weise auf äußere Magnetfelder.

5.1 Diamagnetismus

Der Diamagnetismus ist bei allen Stoffen vorhanden, aber bei bestimmten Konfigurationen der magnetischen Momente der einzelnen Atome wird er von anderen magnetischen Eigenschaften überdeckt. Zu beobachten ist der Diamagnetismus bei allen Stoffen mit abgeschlossenen Elektronenschalen. Ohne äußeres Magnetfeld kompensieren sich die magnetischen Momente aller Elektronen eines Atoms. Unter dem Einfluß eines äußeren Feldes führen die Momente, analog zur Bewegung eines Kreisels, *Präzessionsbewegungen* aus. Dies ist eine Bewegung, die ein rotierender Körper durchführt, an dem eine äußere Kraft angreift. Der Körper weicht senkrecht zur Krafrichtung aus. Unter dem Einfluß des Magnetfeldes B laufen die Spitzen der einzelnen magnetischen Momente auf Kreisbahnen um die Richtung von B . Hierdurch entsteht ein zusätzliches Moment, welches der Richtung des äußeren Feldes entgegengesetzt ist und es schwächt. Somit muß die Suszeptibilität negativ sein. Der Diamagnetismus wird also durch das äußere Feld induziert. Die Suszeptibilität diamagnetischer Stoffe ist nicht temperaturabhängig.

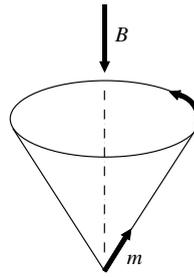


Bild IV-25
Ursache des Diamagnetismus

Tabelle IV-3 Suszeptibilität von diamagnetischen Stoffen

Material	χ_M
N ₂ (gasförmig)	$-6.75 \cdot 10^{-9}$
Bi	$-1.5 \cdot 10^{-4}$
Au	$-2.9 \cdot 10^{-5}$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
Wasser	$-7 \cdot 10^{-6}$

5.2 Paramagnetismus

Diese Stoffe haben normalerweise eine ungerade Anzahl von Elektronen, oder die Elektronenschalen sind nicht gefüllt. Somit verbleibt für jedes Atom ein resultierendes magnetisches Moment. Ohne äußeres Magnetfeld sind alle diese einzelnen Momente statistisch in alle Richtungen verteilt und das resultierende Moment verschwindet. Unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes richten sich die atomaren Momente in Feldrichtung aus und verstärken das Magnetfeld. Die Suszeptibilität ist daher positiv. Da die thermische Bewegung der Atome, und damit auch die der atomaren Momente, mit steigender Temperatur zunimmt, wird dieser Ordnungszustand der Momente im äußeren Feld bei höherer Temperatur schlechter. Daher muß die Suszeptibilität von der Temperatur abhängig sein.

$$\text{Curie-Gesetz } \chi_M = \frac{C}{T} \quad (\text{IV.66})$$

Die Größe C heißt *Curie-Konstante* und ist materialabhängig.

Tabelle IV-4 Suszeptibilität von paramagnetischen Stoffen

Material	χ_M
O ₂ (flüssig)	$3.6 \cdot 10^{-3}$
O ₂ (gasförmig)	$1.5 \cdot 10^{-6}$
Pt	$2.5 \cdot 10^{-4}$
Al	$2.4 \cdot 10^{-5}$

5.3 Ferromagnetismus

Ferromagnetische Stoffe haben, wie paramagnetische Materialien, ein resultierendes magnetisches Moment pro Atom. Durch gegenseitige Kräfte stellt sich ein Zustand ein, bei dem in größeren Bereichen ohne äußeres Magnetfeld alle Momente in einer Richtung ausgerichtet sind. Diese Bereiche, die nach ihrem Entdecker benannten *Weißschen Bezirke*, können Durchmesser bis zu 1 mm haben. Die Wände, die diese Bezirke trennen, sind die *Bloch-Wände*. Ohne äußeres Feld sind die Momente der einzelnen Bezirke statistisch verteilt, der Werkstoff ist dann nach außen unmagnetisch.

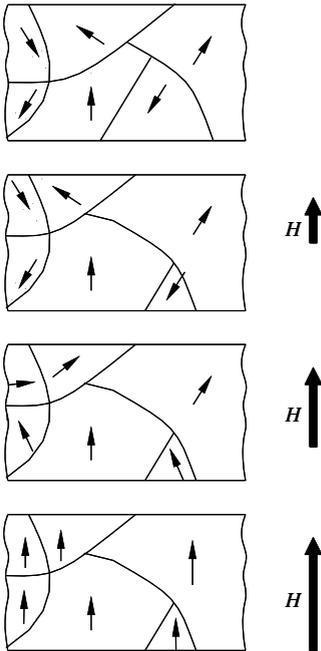


Bild IV-26 Weißsche Bezirke

Wird ein solches Material in ein Magnetfeld gebracht und dieses langsam vergrößert, geschieht die Magnetisierung des Materials in mehreren Schritten. Zunächst werden sich die Bezirke, deren Momente in etwa in Richtung des Magnetfeldes liegen, vergrößern. Es werden also die Wände zwischen den Weißschen Bezirken verschoben. Bei kleinen Feldstärken ist dieser Vorgang *reversibel* (Bereich I in Bild IV-27), bei Abschalten des Feldes werden die Verschiebungen rückgängig gemacht. Wird die Feldstärke weiter vergrößert, werden diese Wandverschiebungen *irreversibel* (Bereich II). Werden die Feldstärken noch größer, so werden schließlich alle Momente der einzelnen Bezirke gedreht, bis sie in der Endstellung parallel zum angelegten Magnetfeld liegen (Bereich III). Die Magnetisierung hat jetzt ihren *Sättigungswert* M_s erreicht.

5.3.1 Magnetisierungskurve

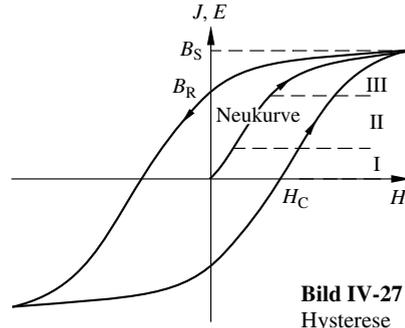


Bild IV-27
Hysterese

Diese komplizierten Vorgänge verlaufen nicht linear mit steigender Feldstärke, daher ist auch die Magnetisierungskurve keine Gerade. Üblicherweise wird nicht die Magnetisierung M aufgetragen, sondern die Polarisation J oder die Flußdichte B . Da für diese Stoffe

$$\mu_r \gg 1 \text{ ist: } \chi_M \approx \mu_r \text{ und } J \approx B \quad (\text{IV.67})$$

Wird die Feldstärke nach Erreichen der *Sättigungsmagnetisierung* verringert, verläuft die Magnetisierungskurve auf einem anderen Weg, da die Vorgänge teilweise irreversibel sind. Wird das Magnetfeld umgepolt und dann wieder bis zur Sättigung magnetisiert, erhält man die in Bild IV-27 aufgezeigte Kurve. Aus dieser *Hysteresekurve* lassen sich folgende Größen ablesen:

Die verbleibende Flußdichte bei abgeschaltetem Magnetfeld wird als *Remanenzflußdichte* oder *Remanenz* B_r bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Stärke von Dauermagneten. Die magnetische Feldstärke, die notwendig ist, um den Stoff zu entmagnetisieren (Wert $B = 0$ einzustellen), wird als *Koerzitivfeldstärke* H_c bezeichnet.

Wird ein Stoff magnetisiert, muß hierzu Energie aufgewendet werden. Diese Energie wird für die Verschiebung der Wände und die Drehung der Momente aufgewendet.

$$w = \int HdB = \int H\mu_0\mu_r(H)dH \quad (\text{IV.68})$$

Da die relative Permeabilität keine Konstante und der mathematische Zusammenhang nicht genau bekannt ist, kann dieses Integral normalerweise nicht berechnet werden. Die Bestimmung der aufzuwendenden Energie pro Volumeneinheit bis zu einer bestimmten Magnetisierung kann grafisch geschehen, indem die schraffierte Fläche in Bild IV-28 bestimmt wird.

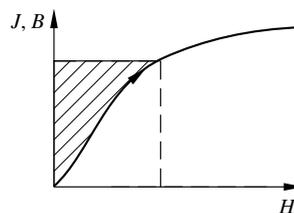


Bild IV-28
Magnetisierungsenergie

Da bei einem vollen Durchlauf der Hysteresekurve in Bereichen, in denen der Werkstoff entmagnetisiert wird, Energie frei wird, ist die gesamte pro Volumeneinheit benötigte Energie bei einem vollen Durchlauf der Kurve aus der Fläche der Hysteresekurve zu entnehmen (Bild IV-29).

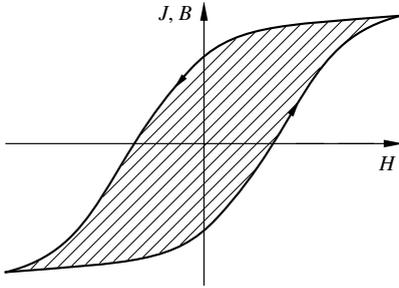


Bild IV-29 Ummagnetisierungsverluste

$$w = \oint HdB \hat{=} A_{\text{Hysteresis}} \quad (\text{IV.69})$$

Magnetische Werkstoffe werden in *magnetisch harte* und *magnetisch weiche* Materialien unterteilt. Magnetisch harte Werkstoffe besitzen eine große Fläche, und damit bei gleicher Remanenz eine große *Koerzitivfeldstärke*, *magnetisch weiche* Stoffe eine kleine Hysteresefläche (siehe Bild IV-30).

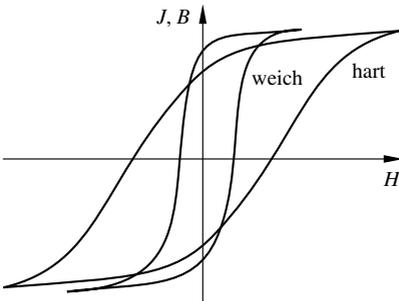


Bild IV-30 harte und weiche Werkstoffe

5.3.2 Verlauf der Permeabilität

Die relative Permeabilität μ_r ist durch Gleichung (IV.50) definiert. Ihr Wert kann aus der Hysteresekurve bestimmt werden. Hierzu wird der 1. Quadrant der Magnetisierungskurve betrachtet. Bei vorgegebener Feldstärke H wird die zugehörige Flußdichte B abgelesen und dann mit Gleichung (IV.50) μ_r berechnet.

Wie aus Bild IV-31 oben zu entnehmen ist, sind bei einer Feldstärke bis zu drei verschiedene Flußdichten möglich. Daher kann es auch drei verschiedene Werte für die relative Permeabilität geben. Die relative Permeabilität ist von der magnetischen Vorgeschichte des Werkstoffes abhängig. Wird die Bestimmung an der Neukurve vorgenommen (Bild IV-

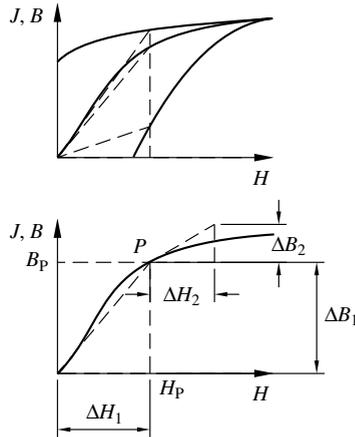


Bild IV-31 Bestimmung der Permeabilität

31 unten), erhält man für jede Feldstärke nur einen Wert. Dieser Wert ist nicht konstant, sondern von H abhängig. Bestimmt wird μ_r für die Feldstärke H_p , indem vom Nullpunkt eine Gerade zum Punkt P auf der Neukurve gezeichnet wird und dann ΔB_1 und ΔH_1 abgelesen werden. Hieraus wird μ_r berechnet.

$$\text{relative Permeabilität } \mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B_1}{\Delta H_1} \quad (\text{IV.70})$$

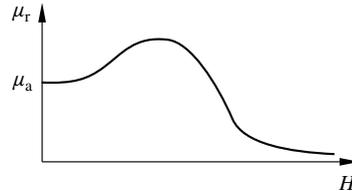


Bild IV-32 Verlauf der Permeabilität

Der prinzipielle Verlauf ist in Bild IV-32 dargestellt. Ausgehend von einem Anfangswert μ_a durchläuft die Kurve ein Maximum. Die Werte für μ_a liegen im Bereich von einigen Hundert bis zu einigen Tausend. Für manche Überlegungen ist es notwendig, nicht die relative Permeabilität, sondern eine Größe zu verwenden, die aus der Steigung der Kurve bestimmt wird. Dies wird *differentielle Permeabilität* μ_d genannt. Im Punkt P wird die Tangente an die Hysteresekurve gezeichnet und deren Steigung nach Bild IV-31 unten durch ΔB_2 und ΔH_2 bestimmt.

$$\text{differentielle Permeabilität } \mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B_2}{\Delta H_2} \quad (\text{IV.71})$$

5.3.3 Temperaturabhängigkeit

Grundlage für die ferromagnetischen Eigenschaften ist die Ausrichtung der magnetischen Momente in den Weißschen Bezirken. Diese Ausrichtung wird als *spontane Magnetisierung* bezeichnet. Eine solche

Ausrichtung wird durch die thermische Energie beeinflusst. Je höher die Temperatur, desto größer ist die thermische Bewegung, und desto geringer wird der Ordnungsgrad sein. Bei Überschreitung einer kritischen Temperatur werden die Weißschen Bezirke zerstört und der Werkstoff wird paramagnetisch. Als Maß für diesen Ordnungsgrad dient der Sättigungswert der Magnetisierung oder der Polarisation. Die Temperaturabhängigkeit von J_s ist in Bild IV-33 gezeigt.

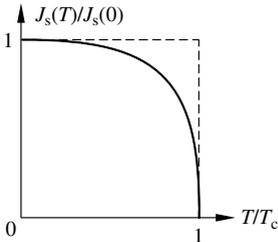


Bild IV-33
Sättigungsmagnetisierung

Aufgetragen sind relative Sättigungswerte, bezogen auf den Wert bei 0 K als Funktion der Temperatur, bezogen auf die kritische Temperatur T_C . Diese kritische Temperatur ist die *Curie-Temperatur*. Für Temperaturen oberhalb der *Curie-Temperatur* gilt für die Suszeptibilität das

$$\text{Curie-Weißsche Gesetz } \chi_M = \frac{C}{T - T_C} \quad (\text{IV.72})$$

Die Curie-Temperaturen einiger Stoffe sind in Tabelle IV-5 aufgeführt.

Tabelle IV-5 Curie-Temperatur und Sättigungspolarisation

Werkstoff	T_C/K	$J_s(0) / \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
Gd	289	2.54
Ni	631	0.64
Fe	1042	2.18
Co	1400	1.81

5.3.4 Magnetostriktion

Durch die Verschiebung der Bloch-Wände bei der Magnetisierung von ferromagnetischen Stoffen kann eine Längenänderung des Werkstückes auftreten. Es kommen sowohl Verlängerungen, *positive Magnetostriktion*, als auch Verkürzungen, *negative Magnetostriktion*, vor. Die relativen Längenänderungen sind sehr klein $\left(\frac{\Delta l}{l} \approx 4 \cdot 10^{-5}\right)$. Technische Anwendung findet dieser Effekt bei der Erzeugung von Ultraschall bis zu einer Frequenz bis zu ungefähr 60 kHz.

5.4 Antiferromagnetismus

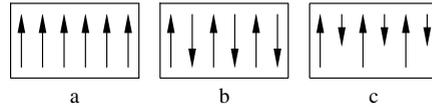


Bild IV-34 Magnetische Stoffe

- a) ferro
- b) antiferro
- c) ferri

Voraussetzung für die ferromagnetischen Eigenschaften sind die Weißschen Bezirke mit den parallel eingestellten magnetischen Momenten (Bild IV-34a). Unter bestimmten Bedingungen stellen sich in einigen Werkstoffen die Momente nicht parallel, sondern antiparallel ein (Bild IV-34b). Für diese Stoffe gilt wie für die Ferromagnetika, daß sie sich oberhalb einer kritischen Temperatur, der *Néel-Temperatur* T_N , paramagnetisch verhalten, da die Ordnung der Momente durch die höhere Temperatur zerstört wird. Unterhalb der Néel-Temperatur sind diese Stoffe schwach magnetisch, da sich die Momente gegenseitig kompensieren. Typische Substanzen sind MnO, NiO, CoO, CrF₃, FeO.

5.5 Ferrimagnetismus

In ferrimagnetischen Stoffen sind die Momente ebenfalls antiparallel eingestellt. Im Gegensatz zu den antiferromagnetischen Stoffen sind sie hier nicht gleich groß (Bild IV-34c). Die Ferrite haben große technische Bedeutung, sowohl als weichmagnetische, als auch als dauermagnetische Werkstoffe. Sie sind keine Metalle, sondern Ionenkristalle. Im Vergleich zu Metallen ($\rho \approx 10^{-7} \Omega \text{ m}$) haben sie einen wesentlich größeren spezifischen Widerstand ($1 < \rho < 10^3 \Omega \text{ m}$). Daher treten kaum Wirbelströme auf. Ferrite werden als Spulenkern für Anwendungen bei hohen Frequenzen eingesetzt. Die Abhängigkeit der spontanen Magnetisierung von der Temperatur ist sehr kompliziert und kann durchaus für die einzelnen Werkstoffe unterschiedlich sein. Auch diese Stoffe werden oberhalb der ferrimagnetischen Curie-Temperatur paramagnetisch. Typische Werkstoffe sind $\text{MeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, (Me = Fe, Co, Ni).

6 Magnetische Kreise

Manchmal ist es zur Berechnung der Kombinationen von magnetischen Bauteilen hilfreich, formale Analogien zu elektrischen Schaltungen herzustellen. Dazu werden eine magnetische Spannung und ein magnetischer Widerstand eingeführt.

6.1 Magnetische Spannung

In Analogie zur elektrischen Spannung nach Gleichung (III.8) kann man auch in magnetischen Kreisen eine magnetische Spannung definieren. Sie hat dann

die gleiche formale Struktur wie die elektrische Spannung. Die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 ist die magnetische Spannung.

$$\text{magnetische Spannung } V_{12} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{s} \quad (\text{IV.73})$$

Die Addition aller Teilspannungen ergibt die *magnetische Umlaufspannung*

$$V = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (\text{IV.74})$$

Dieser Ausdruck ist aber im Durchflutungsgesetz nach Gleichung (IV.6) aufgetreten.

$$\Theta = V \quad (\text{IV.75})$$

6.2 Magnetischer Widerstand

Der magnetische Fluß in einem konstanten Magnetfeld einer Ringspule ist

$$\phi = BA = \mu_0 \mu_r HA = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} A \quad (\text{IV.76})$$

$$NI = V = \phi \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (\text{IV.77})$$

In Analogie zu Gleichung (I.14) wird ein magnetischer Widerstand definiert.

Magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad \frac{R_m}{\frac{l}{\mu_0 \mu_r A}} \left| \frac{A}{\text{Vs}} \right| \frac{\mu_0}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \quad (\text{IV.78})$$

$$\text{magnetischer Leitwert } \Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \quad (\text{IV.79})$$

Das Produkt $\mu_0 \mu_r$ kann als magnetische Leitfähigkeit gedeutet werden. Die relative Permeabilität ist ein Maß dafür, magnetische Feldlinien zu leiten. Der formal gleiche Aufbau der Formeln für elektrische und magnetische Größen hat aber nur den Zweck, den Umgang mit magnetischen Größen zu vereinfachen. Es werden völlig andere Größen miteinander verglichen.

6.3 Unverzweigte Kreise

Ein unverzweigter magnetischer Kreis kann formal behandelt werden wie eine elektrische Masche

$$\sum V = \Theta = NI \quad (\text{IV.80})$$

Ein oft benutzter magnetischer Kreis ist der geschlossenen Eisenkern ohne Luftspalt, wie er in Bild IV-35 gezeichnet ist.

Der Eisenkern hat längs des Umlaufweges l überall den gleichen Querschnitt A . Abweichungen in den Ecken werden vernachlässigt. Die Neukurve ist in Bild IV-36 gegeben. Die Windungszahl der verwendeten Spule ist N . Da die relative Permeabilität von Eisen sehr viel größer ist als die von Luft

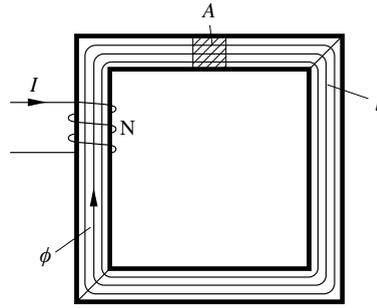


Bild IV-35 Spule mit Eisenkern

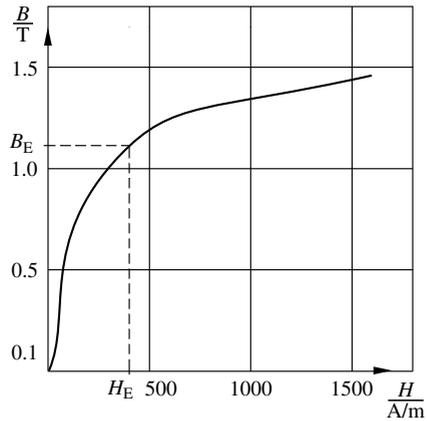


Bild IV-36 Magnetisierungskurve von Eisen

($\mu_{rFe} \approx 2000$), verläuft der in der Spule erzeugte magnetische Fluß fast vollständig im Eisenkern, obwohl die felderzeugende Spule nur an einer Stelle um den Eisenkern liegt. Der Fluß im Eisenkern ist daher überall gleich groß. Der Strom I durch die Spule erzeugt das Magnetfeld $H_E = \frac{NI}{l}$.

Zu diesem Magnetfeld kann aus der Magnetisierungskurve die zugehörige Flußdichte B_E abgelesen werden.

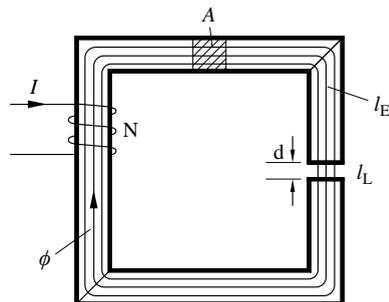


Bild IV-37 Spule mit Luftspalt

Wird nun in den Eisenkern ein Luftspalt der Breite d geschnitten (Bild IV-37), sind analog zur Maschenre-

gel zwei magnetische Spannungen zu addieren. Der magnetische Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der Einzelwiderstände. Da der Luftspalt als sehr klein angenommen wird, ist der magnetische Fluß im Eisen und im Spalt gleich.

Nach Gleichung (IV.77) ist

$$NI = \frac{\phi}{\mu_0 A} \left(\frac{l_E}{\mu_r} + l_L \right) \quad (IV.81)$$

$$NI = H_E l_E + H_L l_L \quad (IV.82)$$

$$H_L = \frac{B_E}{\mu_0} \quad (IV.83)$$

$$NI = H_E l_E + \frac{B_E}{\mu_0} l_L \quad (IV.84)$$

■ **Beispiel:** Ein Ringkern mit der in Bild IV-36 angegebenen Magnetisierungskurve hat eine mittlere Länge von $l = 35 \text{ cm}$ und eine Querschnittsfläche von $A = 4 \text{ cm}^2$. Die verwendete Spule hat eine Windungszahl von $N = 200$.

- a) Welche Stromstärke I wird benötigt, um einen Fluß von $\phi = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ zu erzeugen?
- b) in den Kern wird ein Luftspalt von $0,3 \text{ mm}$ geschnitten. Welche Stromstärke wird jetzt benötigt?

a) $B_E = \frac{\phi}{A} = \frac{4,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,1 \text{ T}$

Aus der Magnetisierungskurve wird zu diesem B -Wert ein Feld $H_E = 400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ abgelesen. Hierzu wird ein Strom von

$$I = \frac{H_E l}{N} = \frac{400 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,35 \text{ m}}{200} = 0,7 \text{ A} \quad \text{benötigt.}$$

- b) B_E und H_E werden wie unter a) bestimmt. Das Feld im Luftspalt ist

$$H_L = \frac{B_E}{\mu_0} = \frac{1,1 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = 8,75 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Nach Gleichung (IV.82) ist $I_L = \frac{H_E l_E + H_L l_L}{N}$;

$$I_L = \frac{(400 \cdot 0,35 + 8,75 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}) \text{ A}}{200} = 2,01 \text{ A}$$

Ist hingegen bei einer Spule mit Luftspalt die Durchflutung gegeben und nach dem magnetischen Feld gefragt, kann dies Problem nur grafisch gelöst werden, da die mathematische Form der Magnetisierungskurve nicht bekannt ist. Ausgehend von Gleichung (IV.84) ist zu sehen, daß das Feld im Eisen linear mit zunehmender Breite des Luftspaltes abnimmt.

$$H_E l_E = NI - \frac{B_E}{\mu_0} l_L \quad (IV.85)$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen berechnen sich nach

$$\text{Schnittpunkte } H_S = \frac{NI}{l_E} \quad (IV.86)$$

$$B_S = \frac{\mu_0 NI}{l_L} \quad (IV.87)$$

Die Schnittpunkte dieser „Luftspaltgeraden“ mit der Magnetisierungskurve ergeben die gesuchten Werte für H_E und B_E .

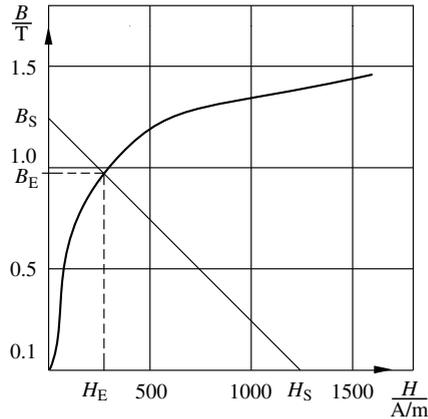


Bild IV-38 Einfluß des Luftspaltes

■ **Beispiel:** Wie groß ist die Feldstärke und die Flußdichte in einem Eisenkern mit $0,3 \text{ mm}$ Luftspalt und einer mittleren Länge von 24 cm , wenn durch eine Spule mit 150 Windungen ein Strom von 2 A fließt?

$$H_S = \frac{2 \text{ A} \cdot 150}{0,24 \text{ m}} = 1250 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B_S = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 2 \text{ A} \cdot 150}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 1,256 \text{ T}$$

Diese Werte und die Gerade werden in Bild IV-38 eingetragen. Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der Magnetisierungskurve sind $H_E = 280 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und $B_E = 0,97 \text{ T}$.

6.4 Verzweigte Kreise

Die Berechnung kann analog zu den Überlegungen in elektrischen Kreisen durchgeführt werden.

$$\text{Knotenregel } \sum_{i=1}^n \phi_i = 0 \quad (IV.88)$$

$$\text{Maschenregel } \Theta = \sum_{i=1}^n H_i l_i \quad (IV.89)$$

■ **Beispiel:** Im mittleren Steg II des Transformatorckerns nach Bild IV-39 soll ein Fluß von $\phi_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ erzeugt werden. Auf Steg I befindet sich eine Spule mit 150 Windungen. Welcher Strom muß durch die Spule fließen? Die Magnetisierungskurve ist durch Bild IV-38 gegeben.

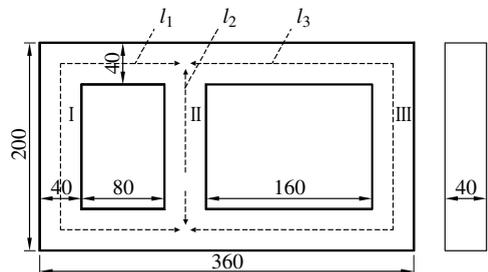


Bild IV-39 verzweigter Kreis

Aus der Zeichnung lassen sich folgende geometrische Größen bestimmen:

$$l_1 = 40\text{cm}, l_2 = 16\text{cm}, l_3 = 56\text{cm}, A = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 .$$

Da sich die Spule nur auf dem Steg I befindet, sind die magnetischen Spannungen der beiden Zweige II und III gleich

$$H_2 l_2 = H_3 l_3 ; \quad B_2 = \frac{\phi_2}{A} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 1 \text{ T} .$$

Hierzu gehört nach Bild IV-38

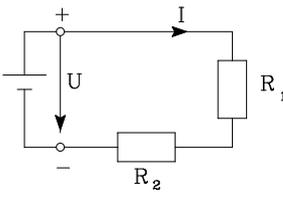
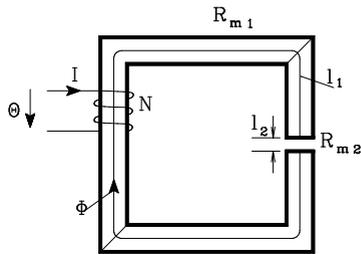
$$H_2 = 300 \frac{\text{A}}{\text{m}} ; \quad H_3 = \frac{H_2 l_2}{l_3} = 85,7 \frac{\text{A}}{\text{m}} ; \quad B_3 = 0,4 \text{ T} ;$$

$$\phi_3 = B_3 A = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} ; \quad \phi_1 = \phi_2 + \phi_3 = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} ;$$

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A} = 1,4 \text{ T} ; \quad H_1 = 1100 \frac{\text{A}}{\text{m}} ;$$

$$NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 488 \text{ A} ; \quad l_1 = 3,25 \text{ A}$$

Tabelle IV-6 Analogie elektrischer-magnetischer Kreis

	elektrischer Kreis	magnetischer Kreis
		
Ursache	elektrische Spannung $U; [U] = 1 \text{ V}$	magnetische Spannung $\Theta = \oint H ds = NI; [\Theta] = 1 \text{ A}$
Wirkung	Strom $I; [I] = 1 \text{ A}$	Fluß $\phi; [\phi] = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$
Ohmsches Gesetz	$R = \frac{U}{I}$	$R_m = \frac{\Theta}{\phi}$
Widerstand	$R = \frac{l}{\chi A}; [R] = 1 \Omega$	$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}; [R_m] = 1 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$
Leitfähigkeit	$\chi; [\chi] = 1 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$	$\mu_0 \mu_r; [\mu_0 \mu_r] = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

V Induktion

Eine der wichtigsten Erscheinungen für die Elektrotechnik ist die *Induktion*. *Faraday* erkannte im Jahr 1831, daß jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in einer Leiterschleife eine Spannung hervorruft, die Spannung *induziert*. Ursache der Induktion ist die Lorentzkraft.

1 Induktion bei Änderung der Fläche

Bei der Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld senkrecht zu der Richtung der Feldlinien wird auf die Elektronen eine Kraft ausgeübt. Die Kraft ist bei den in Bild V-1 angegebenen Richtungen der Geschwindigkeit v und des Magnetfeldes B so, daß die Elektronen zum hinteren Teil des Leiters bewegt werden.

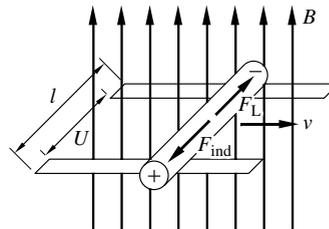


Bild V-1 Änderung der Fläche durch Bewegung des Leiters

Im Bild V-1 ist die Lorentzkraft auf negative Ladungen eingezeichnet. Diese Trennung erfolgt solange, bis das elektrostatische Gegenfeld und die da-

durch erzeugte Kraft F_{ind} sich aufheben. Für die Beträge gilt

$$|F_{ind}| = |F_L| \tag{V.1}$$

$$|e_0 v B| = |e_0 E_{ind}| = \frac{|u_{ind}|}{l} \tag{V.2}$$

$$|v B| = |E_{ind}| \tag{V.3}$$

$$|u_{ind}| = |v B l| \tag{V.4}$$

Wenn auf die Größen u_{ind} , v , B die rechte Handregel angewendet wird, (v in Daumen, B in Zeigefinger und u_{ind} in Mittelfingerichtung nach Bild V-2), ist:

$$\text{Induzierte Spannung } u_{ind} = -v B l \tag{V.5}$$

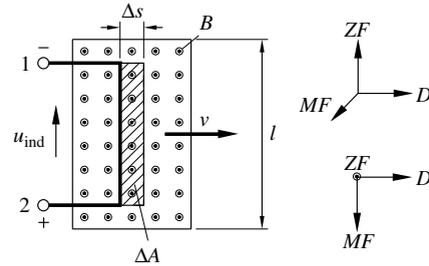


Bild V-2 Bewegter Leiter im Magnetfeld

Bei der betrachteten Bewegung des Leiters wird die Fläche um das Stück vergrößert

$$\Delta A = l \cdot \Delta s = l \cdot v \cdot \Delta t \tag{V.6}$$

$$\text{Flußänderung } \Delta \phi = B \cdot \Delta A = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t \tag{V.7}$$

$$\text{induzierte Spannung } u_{ind} = - \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \tag{V.8}$$

Wird die Leiterschleife in Bild V-2 zwischen den Punkten 1 und 2 durch einen Widerstand verbunden, fließt ein Strom. Hierfür kann das in Bild V-3 dargestellte Ersatzschaltbild verwendet werden.

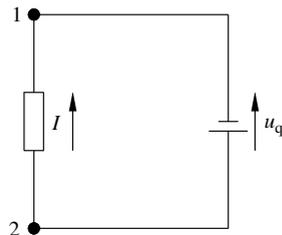


Bild V-3 Induktion als Ersatzspannungsquelle

Der Strom, der in Bild V-2 durch den Leiter fließt, erzeugt selbst wieder ein Magnetfeld. Die Richtung dieses induzierten Feldes ist so, daß auf den Leiter eine Kraft ausgeübt wird, die die Bewegung des Leiters hemmt (Bild V-4). Das wird als *Lenzsche Regel* bezeichnet.

Die durch Bewegung von Magneten oder Leitern erzeugten Induktionsströme haben eine solche Richtung, daß ihr Magnetfeld der Bewegung entgegen gesetzt wirkt.

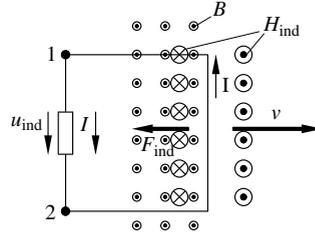


Bild V-4 Lenzsche Regel

Es muß also bei der Bewegung Arbeit geleistet werden.

Das Magnetfeld stand bei der bisherigen Betrachtung senkrecht zur Fläche. Ist dies nicht der Fall, wird der Fluß durch den Flächenanteil, der senkrecht zum Magnetfeld steht, bestimmt. Eine Flußänderung kann auch durch Rotation einer Leiterschleife nach Bild V-5 bewirkt werden. Die Schleife dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

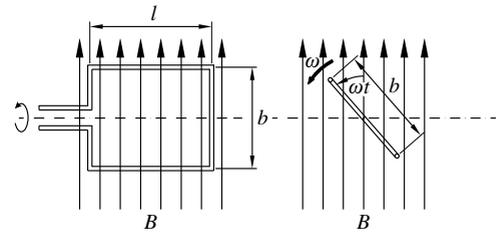


Bild V-5 Rotation einer Leiterschleife

$$\text{Momentaner Fluß } \phi = B \cdot A \cdot \cos \omega t \tag{V.9}$$

Daraus resultiert eine induzierte Spannung

$$u_{ind} = - \frac{d\phi}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t \tag{V.10}$$

$$\text{Wechselspannung } u = \hat{u} \cdot \sin \omega t \tag{V.11}$$

$$\text{Scheitelspannung } \hat{u} = B \cdot A \cdot \omega \tag{V.12}$$

Wird nicht nur eine Schleife, sondern eine Spule mit N Windungen gedreht, ist die

$$\text{Scheitelspannung } \hat{u} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \tag{V.13}$$

■ **Beispiel:** Ein in Richtung Ost-West liegender Metallstab von 2 m Länge fällt aus 15 m Höhe zu Boden. Welche Spannung wird durch das Erdmagnetfeld induziert, wenn der Stab den Boden erreicht ($B_{\text{Erde}} = 20 \mu\text{T}$)?

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 15} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17,16 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

$$|u_{ind}| = |v B l| = 17,16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{T} \cdot 2 \text{m} = 0,68 \text{mV}$$

■ **Beispiel:** Eine quadratische Spule mit der Kantenlänge $a = 5 \text{ cm}$ und $N_1 = 50$ Windungen rotiert mit $n = 250 \text{ min}^{-1}$ um ihre Sym-

metrieachse im Inneren einer langen Zylinderspule, die je cm 8 Windungen hat und von 6 A durchflossen wird. Welchen Scheitelwert erreicht die induzierte Spannung?

$$B_{Sp} = \mu_0 \frac{N_{Sp} I}{l_{Sp}} ; \quad B_{Sp} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{8 \cdot 6A}{10^{-2} m} = 6 \text{ mT} ;$$

$$\dot{u} = N_1 \cdot B \cdot A \cdot 2\pi \cdot n ;$$

$$\dot{u} = 50 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{m^2} \cdot (5 \cdot 10^{-2} m)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{250}{60} \frac{1}{s} = 20 \text{ mV}$$

2 Induktion bei Änderung des Magnetfeldes

Bei konstanter Fläche einer Leiterschleife oder einer Spule kann durch Magnetfeldänderungen eine Flußänderung hervorgerufen werden. Dies kann z.B. durch Stromänderung in einer Erregerspule erreicht werden. Die Flußänderung ist dann

$$\text{Flußänderung} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 N_{err}}{l_{err}} \frac{dI_{err}}{dt} \quad (V.14)$$

Dieser Effekt wird bei Transformatoren verwendet. Das Induktionsgesetz lautet bei N Windungen einer Feldspule

$$\text{Induktionsgesetz} \quad u_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (V.15)$$

$$u_{ind} = -N \left(A_n \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_n}{dt} \right) \quad (V.16)$$

A_n ist der Flächenanteil, der senkrecht zu den Feldlinien steht.

Aus Gleichung (V.16) geht hervor, daß es gleichgültig ist, ob sich die magnetische Flußdichte bei gleichbleibender Fläche (*Transformatorenprinzip*) oder die Fläche bei gleichbleibender Flußdichte (*Generatorprinzip*) ändert.

Entscheidend ist, daß sich der Fluß in einer Leiterschleife ändert. Wird eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld bewegt, ändert sich der Fluß nicht. Die durch die auch hier vorhandene Lorentzkraft verursachte Verschiebung der Elektronen hebt sich in gegenüberliegenden Teilen der Schleife gegenseitig auf.

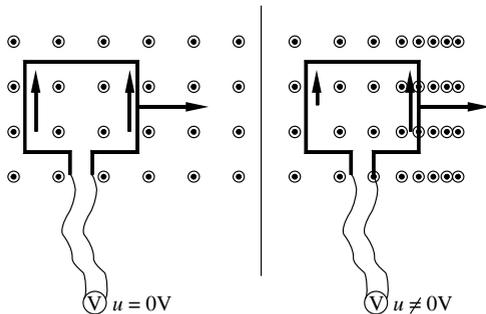


Bild V-6 Bewegung einer Schleife im homogenen und inhomogenen Feld

Wird eine Schleife im inhomogenen Feld bewegt, entsteht eine Induktionsspannung, da sich bei der Bewegung der Fluß ändert und in den gegenüberliegenden Teilen der Schleife unterschiedliche Spannungen induziert werden. In den in Bild V-6 parallel zur Bewegungsrichtung liegenden Teilen der Schleife werden keine Spannungen induziert.

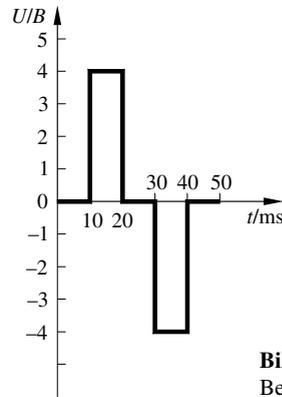
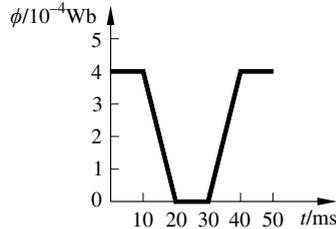


Bild V-7
Beispiel Induktion

■ **Beispiel:** Eine Spule mit $N = 100$ Windungen wird von einem Fluß Φ durchsetzt, der den in Bild V-7 oben dargestellten Verlauf hat. Welchen zeitlichen Verlauf hat die induzierte Spannung?

In den Zeitintervallen $0 \dots 10 \text{ ms}$, $20 \dots 30 \text{ ms}$, $> 40 \text{ ms}$ ändert sich der Fluß nicht, somit ist in diesen Bereichen $u_{ind} = 0 \text{ V}$.

Im Intervall $10 \dots 20 \text{ ms}$ gilt

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -40 \text{ mV} ;$$

$$u_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt} = -100 \cdot (-40 \text{ mV}) = 4 \text{ V}$$

Im Intervall $30 \dots 40 \text{ ms}$ hat die induzierte Spannung denselben Wert mit umgekehrtem Vorzeichen. Die induzierte Spannung ist in Bild V-7 unten aufgetragen.

3 Die Induktivität einer Spule

3.1 Selbstinduktion

In der Ringspule in Bild IV.4 mit der Windungszahl N soll der Strom i beliebig veränderbar sein. Wird der eingespeiste Strom geändert, so ändert sich auch der von diesem Strom erzeugte magnetische Fluß ϕ . Wegen dieser Flußänderung wird eine Spannung in der Spule induziert. Dieser Vorgang wird *Selbstinduktion* genannt. Die induzierte Spannung ist nach

der Lenzschen-Regel dem erzeugenden Strom entgegen gesetzt.

$$u_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} \tag{V.17}$$

Da die Flußänderung durch eine Stromänderung verursacht wird, gilt auch

$$u_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt} \tag{V.18}$$

$$\text{Induktivität } L = \left| u_{\text{ind}} \frac{dt}{di} \right| = \frac{L}{H} \left| \frac{u}{V} \frac{i}{A} \frac{t}{s} \right| \tag{V.19}$$

Die Einheit ist 1 Henry, 1 H.
Aus Gleichung (V.17) und (V.18) folgt

$$L = N \cdot \frac{d\phi}{di} = N \cdot \frac{A \cdot dB}{di} \tag{V.20}$$

$$L = NA \frac{dB}{dH} \cdot \frac{dH}{di} \tag{V.21}$$

Befindet sich kein ferromagnetischer Stoff in der Spule, so ist

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \tag{V.22}$$

$$\frac{dH}{di} = \frac{N}{l} \tag{V.23}$$

$$\text{Induktivität } L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} \tag{V.24}$$

Ist der Spulenkörper ferromagnetisch, gilt

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \mu_d \tag{V.25}$$

$$L = \mu_0 \mu_d N^2 \frac{A}{l} \tag{V.26}$$

μ_d ist die differentielle Permeabilität.

Die Induktivität spielt in Wechselstromkreisen eine große Rolle. Sie ist für beliebige Leiteranordnungen und Leitergeometrien schwierig zu berechnen, läßt sich aber in Wechselstromkreisen gut durch Messungen bestimmen.

$$\text{Einfachleitung } L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - \frac{3}{4} \right) \tag{V.27}$$

$$\text{Doppelleitung } L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \tag{V.28}$$

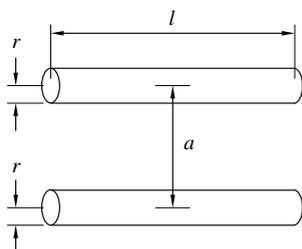


Bild V-8 Doppel-Leitung

Bei koaxialen Leitern ist die Gesamtinduktivität nach folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$\text{Innenleiter } L_i = \frac{\mu_0 \mu_r l}{8\pi} \tag{V.29}$$

$$\text{Zwischenraum } L_{\text{ZW}} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r} \tag{V.30}$$

$$\text{Außenleiter } L_a = \frac{\mu_0 \mu_r l r_2^4}{2\pi (r_2^2 - r_1^2)} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{(3r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)}{4r_2^4} \right) \tag{V.31}$$

$$\text{gesamte Induktivität } L_{\text{ges}} = L_i + L_{\text{ZW}} + L_a \tag{V.32}$$

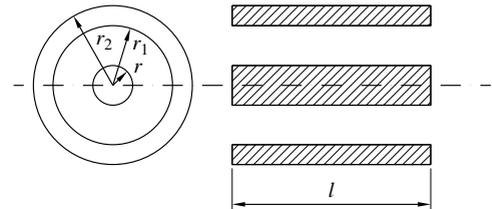


Bild V-9 Koaxialleiter

3.2 Gegeninduktion

Befindet sich in der Nähe einer stromdurchflossenen Spule Sp_1 eine zweite Spule Sp_2 , so verläuft ein Teil des von der Spule 1 erzeugten Magnetfeldes auch durch die Spule 2. Die Spulen sind *magnetisch gekoppelt*. Der vom Strom I_1 in der Spule 1 erzeugte magnetische Fluß durchsetzt die Spule 2 nur zum Teil. Dieser Anteil ist ϕ_{12} . Der Gesamtfluß in der Spule 2 ist dann

$$\phi_{G12} = N_2 \phi_{12} \tag{V.33}$$

$$N_2 \phi_{12} \sim I_1 \tag{V.34}$$

$$N_2 \phi_{12} = M_{12} I_1 \tag{V.35}$$

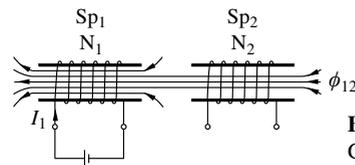


Bild V-10
Gegeninduktion

Der Faktor M_{12} wird als *Gegeninduktivität* bezeichnet. Bei Abwesenheit von ferromagnetischen Materialien ist die Gegeninduktivität eine Konstante. Wird der Strom in der Spule 1 geändert, wird in der Spule 2 eine Spannung induziert.

$$u_2 = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = \tag{V.36}$$

Wird die Spule 2 vom Strom durchflossen, so wird in der Spule 1 eine Spannung

$$u_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \tag{V.37}$$

induziert. Die Gegeninduktivitäten sind gleich, wenn die Permeabilitäten nicht vom Magnetfeld abhängen, wenn also keine ferromagnetischen Stoffe beteiligt sind. Wie aus Bild V-10 ersichtlich, wird Spule 2 nicht vom gesamten in Spule 1 erzeugten Fluß durchsetzt.

$$\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{\sigma 1} \quad (\text{V.38})$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{\sigma 2} \quad (\text{V.39})$$

ϕ_{12} wird als *Hauptfluß*, $\phi_{\sigma 1}$ als *Streufuß* bezeichnet. Es lassen sich folgende Ausdrücke definieren:

$$\text{Streufaktoren } \sigma_1 = \frac{\phi_{\sigma 1}}{\phi_1}; \quad \sigma_2 = \frac{\phi_{\sigma 2}}{\phi_2} \quad (\text{V.40})$$

$$\text{Streuinduktivitäten } L_{\sigma 1} = \sigma_1 L_1; \quad L_{\sigma 2} = \sigma_2 L_2 \quad (\text{V.41})$$

$$\text{Koppelungsfaktoren } k_1 = 1 - \sigma_1; \quad k_2 = 1 - \sigma_2 \quad (\text{V.42})$$

$$\text{totaler Koppelungsfaktor } k = \sqrt{k_1 k_2} \quad (\text{V.43})$$

$$\text{Hauptflüsse } \phi_{12} = k_1 \Phi_1; \quad \phi_{21} = k_2 \Phi_2 \quad (\text{V.44})$$

$$\text{Gegeninduktivität } M = \sqrt{k_1 k_2 L_1 L_2} = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (\text{V.45})$$

■ **Beispiel:** Wie groß sind die Streufaktoren für die in Bild V-11 dargestellte Anordnung zweier konzentrisch ineinander liegender Zylinderwindungen? Die Abmessungen der beiden Spulen sind

$$d_1 = 18 \text{ mm}, \quad l_1 = 60 \text{ mm}, \quad N_1 = 250,$$

$$d_2 = 10 \text{ mm}, \quad l_2 = 30 \text{ mm}, \quad N_2 = 24.$$

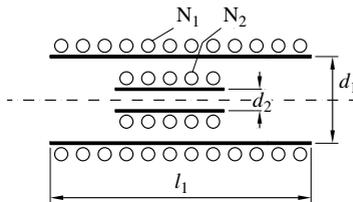


Bild V-11 Beispiel Gegeninduktion

$$\text{Fluß } \phi_1 = \mu_0 H_1 A_1 = \mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_1^2}{4};$$

$$\phi_{12} = \mu_0 H_1 A_2 = \mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$\text{induzierte Spannung } u_2 = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4 l_1} \frac{di_1}{dt}$$

Der Faktor vor $\frac{di_1}{dt}$ ist die Gegeninduktivität M .

$$\text{Gegeninduktivität } M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4 l_1};$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 250 \cdot 24 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 9,87 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$\text{Streufaktor } \phi_{\sigma 1} = \phi_1 - \phi_{12};$$

$$\sigma_1 = \frac{\phi_{\sigma 1}}{\phi_1} = 1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_1}; \quad \sigma_1 = 1 - \frac{\mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_2^2}{4}}{\mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_1^2}{4}} = 1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2;$$

$$\sigma_1 = 1 - \left(\frac{10 \text{ mm}}{18 \text{ mm}}\right)^2 = 0,691$$

3.3 Energie im Magnetfeld einer Spule

Zum Aufbau des Magnetfeldes in einer Spule ist Energie erforderlich. Ist die Induktivität L bekannt, kann die benötigte Energie berechnet werden.

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.46})$$

$$dW = u \cdot i \cdot dt \quad (\text{V.47})$$

$$dW = L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di \quad (\text{V.48})$$

Wird die Spule nach Bild V-12 geschaltet, steigt der Strom vom Wert $i = 0 \text{ A}$ bis zum Maximalwert $i = \frac{U}{R} = I$ an. Damit beträgt die der Spule zugeführte und im Magnetfeld gespeicherte Energie:

$$\text{Energie des Magnetfeldes } W = \int_0^I Li \cdot di \quad (\text{V.49})$$

Ist die Induktivität konstant, enthält die Spule kein ferromagnetisches Material, kann dieses Integral berechnet werden.

$$\text{Energie in einer Spule } W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{V.50})$$

Bei Anwesenheit von ferromagnetischen Materialien ist zur Bestimmung der Energie das grafische Verfahren nach Bild IV.28 anzuwenden.

3.4 Ein- und Ausschaltvorgänge

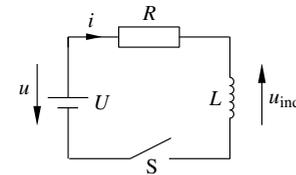


Bild V-12
Spule

Wird im Stromkreis von Bild V-12 zur Zeit $t = 0$ der Schalter S geschlossen, ändert sich der Strom i . Damit wird in der Spule eine Spannung induziert. Es gilt nach der Maschenregel

$$u + u_{\text{ind}} - iR = 0 \quad (\text{V.51})$$

$$u - L \frac{di}{dt} = iR \quad (\text{V.52})$$

Zu Beginn des Vorganges ist der Strom $i = 0$, am Ende hat der Strom seinen Maximalwert $I = \frac{U}{R}$ erreicht.

Die mathematische Form dieser Differentialgleichung ist wie die beim Aufladen eines Kondensators. Die Lösungsfunktion ist wie in Gleichung (III.67) durch eine e -Funktion darzustellen.

$$\text{Einschalten } i = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (\text{V.53})$$

$$i = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{V.54})$$

$$\text{Zeitkonstante } \tau = \frac{L}{R} \quad (\text{V.55})$$

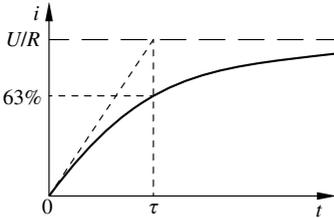


Bild V-13 Einschaltvorgang einer Spule

Wird eine Spule, durch die ein konstanter Strom I fließt und in der ein konstantes Magnetfeld besteht, kurzgeschlossen, wird eine Spannung induziert, die nach der Lenzschen Regel versucht, das Magnetfeld aufrecht zu halten. Der Strom wird seinen Endwert ebenfalls nach einer e -Funktion erreichen.

$$\text{Kurzschließen } i = I e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{V.56})$$

- **Beispiel:** Eine Konstantstromquelle nach Bild V-14 speist die Reihenschaltung aus $R = 50 \Omega$ und $L = 200 \text{ mH}$ mit einem Strom $I = 2 \text{ A}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.
 - Welcher Strom fließt durch den Widerstand nach 2 ms ?
 - Welche Spannung liegt dann am Widerstand?
 - Welche Spannung liegt dann an der Spule?

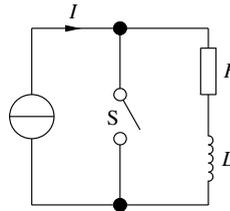


Bild V-14
Beispiel Kurzschließen einer Spule

$$\tau = \frac{0,2 \text{ H}}{50 \Omega} = \frac{0,2 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}{50 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4 \text{ ms}$$

- $i = I e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 \text{ A} \cdot e^{-\frac{2 \text{ ms}}{4 \text{ ms}}} = 1,21 \text{ A}$;
- $u_R = i \cdot R = 1,21 \text{ A} \cdot 50 \Omega = 60,65 \text{ V}$
- $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot I \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$;
 $u_L = 0,2 \text{ H} \cdot 2 \text{ A} \cdot \left(-\frac{50 \Omega}{0,2 \text{ H}} \right) e^{-\frac{2 \text{ ms}}{4 \text{ ms}}} = -60,65 \text{ V}$;
 $u_R + u_L = 0$

3.5 Zusammenschalten von Induktivitäten

Für die Zusammenschaltung von Induktivitäten gelten dieselben Gesetze wie bei Ohmschen Widerständen.

$$\text{Reihenschaltung } L_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n L_i \quad (\text{V.57})$$

$$\text{Parallelschaltung } \frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (\text{V.58})$$

VI Wechselstrom

1 Grundbegriffe des Wechselstroms

Wechselstrom oder Wechselspannung sind Größen, bei denen sich die Werte zeitabhängig periodisch wiederholen. Der arithmetische Mittelwert der sich periodisch mit der Zeit ändernden Augenblickswerte ist gleich Null. Die Zeitspanne, nach der sich der periodische Verlauf gleichartig wiederholt, ist die *Periodendauer* T . Die Zahl der Perioden pro Zeit nennt man die *Frequenz* f .

$$\text{Frequenz } f = \frac{1}{T} \quad \frac{f}{\frac{1}{s}} \quad (\text{VI.1})$$

Die Einheit der Frequenz ist $[f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$ (Hertz). Nach DIN 5488 unterscheidet man periodische Vorgänge, deren Mittelwert nicht Null wird und solche, deren Mittelwert Null wird. Ist der Mittelwert Null, spricht man von einer Wechselgröße. Bei den Wechselgrößen unterscheidet man die nichtsinusförmigen und die sinusförmigen Vorgänge (Sinusgrößen). Im Bild VI-1 ist der Verlauf einer Sinusgröße dargestellt.

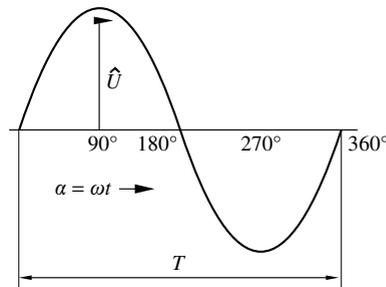


Bild VI-1 Verlauf einer Sinusgröße

1.1 Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung

Wird eine Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld gedreht (Bild VI-2), so hängt die Größe der indu-

zierten Spannung von der Winkelgeschwindigkeit und der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche ab.

induzierte Spannung

$$u_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

u_{ind}	B	A	ω
V	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	m^2	$\frac{1}{\text{s}}$

(VI.2)

Maximalwert der Spannung (Scheitelwert \hat{u}):

Scheitelwert $\hat{u} = B \cdot A \cdot \omega$ (VI.3)

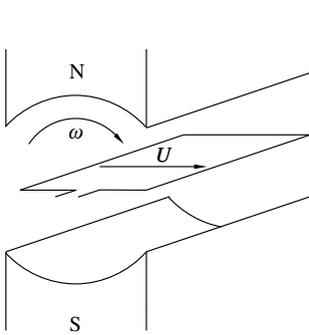


Bild VI-2 Induktionsvorgang

Rotiert die Leiterschleife einmal im Magnetfeld, hat sie einen Winkel von 360° überstrichen. Dabei wurde in die Leiterschleife eine Wechselfspannung induziert, deren zeitlicher Verlauf einer Sinusschwingung entspricht. Die Leiterschleife hat mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Periodendauer T einen Winkel $\alpha = 2\pi$ (Bogenmaß) überstrichen.

In Anlehnung an die gleichförmige Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω hat man für Wechselgrößen die *Kreisfrequenz* definiert.

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ $\frac{\omega}{\text{s}^{-1}} \left| \frac{f}{\text{s}^{-1}} \right.$ (VI.4)

Die Kreisfrequenz ω gibt an, welcher Bogen in einer Sekunde überstrichen wird. Hieraus ergibt sich die *Periodendauer* T .

Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (VI.5)

■ **Beispiel:** Eine Leiterschleife dreht sich mit einer Umdrehung pro Sekunde. Welchen Wert hat die Kreisfrequenz und die Periodendauer?

Mit $f = 1 \text{ s}^{-1}$ folgt für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \text{ s}^{-1} = 6,28 \text{ s}^{-1}$.

Die Leiterschleife hat also einen Bogen von 2π in einer Sekunde zurückgelegt.

Für die Periodendauer ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,28 \text{ s}^{-1}} = 1 \text{ s}^{-1}$$

■ **Beispiel:** Eine Leiterschleife dreht sich mit 100 Umdrehungen pro Sekunde. Welchen Wert hat die Kreisfrequenz und die Periodendauer?

Mit $f = 100 \text{ s}^{-1}$ folgt für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 \text{ s}^{-1} = 6,28 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$.

Die Leiterschleife hat also einen Bogen von $2\pi \cdot 100$ in einer Sekunde zurückgelegt.

Für die Periodendauer ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,28 \cdot 100 \text{ s}^{-1}} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

1.2 Phasenverschiebung

Werden in einem Magnetfeld zwei Leiterschleifen, die in einem Winkel φ zueinander versetzt sind, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit gedreht, so werden in ihnen zwei sinusförmige Spannungen induziert, die sich nicht decken. Nach Bild VI-3 erreichen beide Spannungen ihr Maximum um den *Phasenwinkel* φ verschoben.

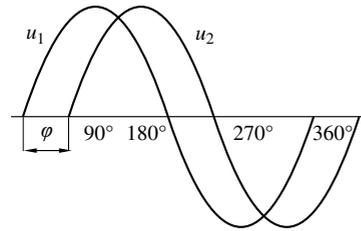


Bild VI-3 Liniendiagramm zweier phasenverschobener Spannungen

Die Spannungen sind *phasenverschoben*. Nach Bild VI-3 erreicht die Spannung u_2 den Maximalwert später als die Spannung u_1 . Die Spannung u_2 eilt der Spannung u_1 nach.

1.3 Effektivwert

Mit dem Scheitelwert \hat{i} ergibt sich der *Effektivwert* I_{eff} eines sinusförmigen Wechselstroms:

Effektivwert $I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{i}$ (VI.6)

Der *Effektivwert* I_{eff} eines sinusförmigen Stroms verrichtet an einem Widerstand R die gleiche elektrische Arbeit wie ein gleich großer Gleichstrom.

Gleiche Überlegungen für die Spannung ergeben den *Effektivwert* U_{eff} einer sinusförmigen Wechselspannung:

Effektivwert $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{u}$ (VI.7)

Effektivwerte werden wie Gleichstromwerte durch Großbuchstaben bezeichnet, eventuell zusätzlich durch den Index „eff“.

■ **Beispiel:** Welchen Effektivwert weist ein sinusförmiger Wechselstrom mit Scheitelwert $\hat{i} = 32 \text{ A}$ auf?

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{i} = 0,707 \cdot 32 \text{ A} = 22,624 \text{ A}$$

■ **Beispiel:** Welchen Scheitelwert weist eine sinusförmige Spannung mit dem Effektivwert $U = 220 \text{ V}$ auf?

$$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U = 1,414 \cdot 220 \text{ V} = 311,08 \text{ V}$$

1.4 Darstellungsarten

Eine Sinusgröße ist eindeutig bestimmt durch die Angabe von Amplitude, Frequenz und Phasenlage. Handelt es sich um Sinusgrößen mit gleicher Frequenz, genügen zwei Angaben, um die Sinusgröße eindeutig zu bestimmen. Aus diesem Grund kann bei der Berechnung von sinusförmigen Vorgängen auf die Darstellung in Abhängigkeit von der Zeit (Frequenz) verzichtet werden. Für die Berechnung von Sinusgrößen in der Elektrotechnik haben sich zwei Verfahren durchgesetzt: die Zeigerdarstellung und die Darstellung der Größen in der komplexen Zahlenebene.

1.4.1 Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Der zeitliche Verlauf einer sinusförmigen Wechselgröße kann über ein Linien- oder ein *Zeigerdiagramm* dargestellt werden.

Aus der Geometrie ist bekannt, daß sich eine Sinuskurve aus der Drehung eines Zeigers im Einheitskreis konstruieren läßt. Umgekehrt kann jede Sinuskurve durch einen Zeiger, der nach Bild VI-4 rotiert, dargestellt werden.

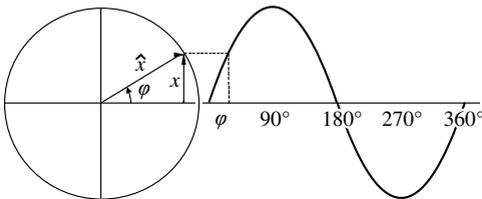


Bild VI-4 Konstruktion eines Zeigers aus einer Sinusgröße

Wird die Länge des Zeigers als Maximalwert der Sinusgröße festgelegt, kann der Augenblickswert in Abhängigkeit vom zurückgelegten Winkel bestimmt werden.

Augenblickswert $x = \hat{x} \cdot \sin \varphi$ (VI.8)

Zeichnerisch läßt sich der Augenblickswert ermitteln, indem von der Zeigerspitze das Lot auf die durch den Kreismittelpunkt gehende Gerade gefällt wird. Das Zeigerdiagramm stellt eine „Momentaufnahme“ der sich drehenden Zeiger dar.

Die Addition zweier sinusförmiger Wechselgrößen in der Zeigerdarstellung ergibt sich, wenn ein Zeiger parallelverschoben wird, bis sein Ursprung auf der Spitze des zweiten Zeigers liegt (Bild VI-5).

Die Subtraktion zweier Zeiger ergibt sich, wenn ein Zeiger parallelverschoben wird, bis seine Spitze auf der Spitze des zweiten Zeigers liegt (Bild VI-6).

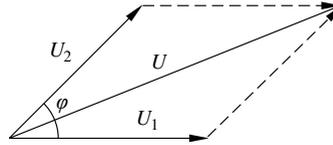


Bild VI-5 Addition zweier Zeiger

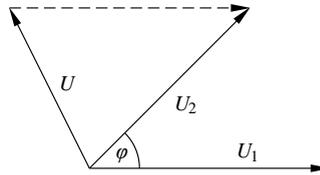


Bild VI-6 Subtraktion zweier Zeiger

1.4.2 Darstellung von Sinusgrößen in der komplexen Zahlenebene

Eine Sinusgröße läßt sich durch die Zeigerdarstellung relativ einfach darstellen. Durch das graphische Verfahren dieser Darstellungsart ist eine genaue Auswertung oft unmöglich oder sehr zeitaufwendig. Aus diesem Grund wurden die Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene als komplexe Größen dargestellt und können somit berechnet werden.

In der Gaußschen Zahlenebene wird jeder Punkt dieser Ebene durch eine komplexe Zahl beschrieben.

komplexe Zahl $\underline{Z} = a + jb$ (VI.9)

Faktor a stellt den reellen Anteil dar und Faktor jb den imaginären Anteil. Beschreibt man den Endpunkt eines Zeigers \underline{Z} , der vom Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene ausgeht, durch eine komplexe Zahl (Bild VI-7), so ist damit auch der komplexe Zeiger eindeutig bestimmt.

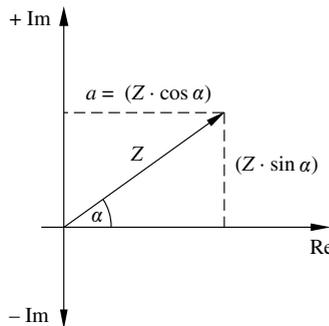


Bild VI-7 Zeiger in der komplexen Zahlenebene

kartesische Form $\underline{Z} = a + jb = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

(mit $\underline{Z}_1 = a$ und $\underline{Z}_2 = jb$) (VI.10)

Der Zeiger \underline{Z} kann also durch die Addition der beiden Zeiger \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 gebildet werden.

Vereinbarungsgemäß wird für die komplexe Darstellung von Zeigern das gleiche Symbol und die gleiche Definition benutzt wie für den Zeiger selbst. Der komplexe Zeiger wird mit dem unterstrichenen lateinischen Buchstaben der Größe bezeichnet. Der Betrag wird nur durch den lateinischen Buchstaben angegeben.

Betrag des Zeigers $|Z| = Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$ (VI.11)

Der Winkel mit der reellen Achse kann folgendermaßen berechnet werden:

Winkel des Zeigers $\alpha = \arctan \frac{Z_2}{Z_1}$ (VI.12)

Der Betrag des Zeigers läßt sich über die Phasenlage in den Realteil und den Imaginärteil zerlegen.

Realteil $Z_1 = |Z| \cdot \cos \alpha$ (VI.13)

Imaginärteil $Z_2 = |Z| \cdot \sin \alpha$ (VI.14)

Mit Hilfe dieser Zerlegung kann der Zeiger in der polaren Form beschrieben werden.

polare Form $Z = |Z| \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha)$ (VI.15)

Mit Hilfe der Eulerschen Gleichung ist die Exponentialform des Zeigers möglich:

Eulersche Gleichung $\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$ (VI.16)

Exponentialform $Z = |Z| \cdot e^{j\alpha} = Z \cdot e^{j\alpha}$ (VI.17)

Die bisher aufgeführten Möglichkeiten der Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene gelten allgemein, also unabhängig davon, ob der Winkel α konstant oder eine Funktion der Zeit ist. Bei der Behandlung von Wechselstromaufgaben muß jedoch zwischen den Operatoren und den Zeigern unterschieden werden.

Operatoren sind zeitlich konstante Größen. Sie symbolisieren meistens Widerstände. Ihr Winkel α zu der reellen Achse ist zeitlich konstant.

Zeiger symbolisieren sinusförmige Wechselgrößen. Ihr Winkel α ist eine Funktion der Zeit (Summe aus $\omega \cdot t + \varphi$), obwohl diese Tatsache bei der Darstellung nicht berücksichtigt wird.

Berücksichtigt wird der Unterschied zwischen Operatoren und Zeigern bei der mathematischen Behandlung dieser Größen und zwar beim Integrieren und Differenzieren.

2 Grundschaltelemente im Wechselstromkreis

2.1 Ohmscher Widerstand

Wird ein ohmscher Widerstand an eine Wechselspannung angeschlossen, ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz:

2. Kirchhoffsche Satz $u - i \cdot R = 0$ (VI.18)

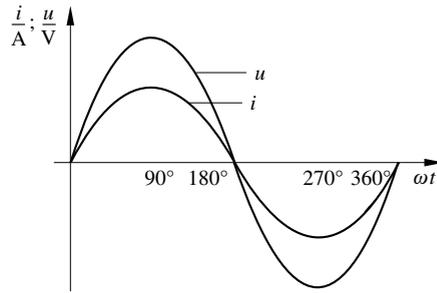


Bild VI-8 Verlauf von Strom und Spannung am Ohmschen Widerstand

$i = \frac{u}{R}$ (VI.19)

Der Wechselstrom hat also zu jeder Zeit einen Wert abhängig von u und R . Zwischen Strom und Spannung tritt keine Phasenverschiebung auf (Bild VI-8). Der Scheitelwert des Stroms und der ohmsche Wechselstromwiderstand berechnet sich zu

Scheitelwert $\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}$ (VI.20)

ohmscher Wechselstromwiderstand

$R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I}$ (VI.21)

Wechselstromleitwert $G = \frac{1}{R} = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{I}{U}$ (VI.22)

Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt folgende Gleichungen:

ohmsches Gesetz $I = \frac{U}{Z}$ (VI.23)

Widerstandsoperator $Z = R = \frac{U}{I}$ (VI.24)

Leitwertoperator $Y = \frac{1}{Z} = G$ (VI.25)

2.2 Kapazität

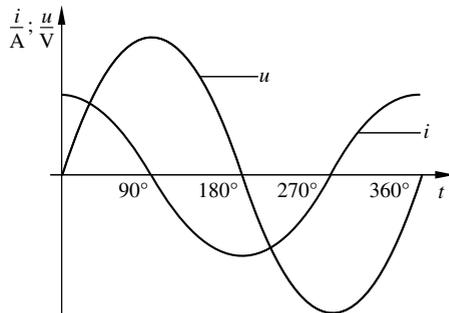


Bild VI-9 Verlauf von Strom und Spannung an einer Kapazität

Wird eine Kapazität an eine Wechselspannung angeschlossen, so ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz

2. Kirchhoffsche Satz $u - \frac{1}{C} \int i dt = 0$ (VI.26)

$i = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$
(mit $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$) (VI.27)

Zwischen dem Strom i und der Spannung u besteht eine Phasenverschiebung von $\varphi = 90^\circ$ (Bild VI-9). Teilt man die Spannung durch den Strom, ergibt sich der *kapazitive Blindwiderstand* X_C

kapazitiver Blindwiderstand
 $|X_C| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega \cdot C}$ $\frac{\omega}{\frac{1}{s}} \frac{C}{\frac{As}{V}}$ (VI.28)

kapazitiver Leitwert $B_C = \omega \cdot C$ (VI.29)

Der Kondensator im Wechselstromkreis ist also für den Wechselstrom kein unüberwindliches Hindernis, er wirkt aber trotzdem wie ein Widerstand. Dieses ist leicht zu verstehen, wenn man sich vorstellt, daß bei jeder Periode Ladungsträger zwischen den Kondensatorplatten und der Spannungsquelle bewegt werden. Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt die Gleichungen VI.30 bis VI.32.

ohmsches Gesetz $I = \frac{U}{Z}$ (VI.30)

Widerstandsoperator
 $Z = \frac{1}{j \omega \cdot C} = -j X_C = \frac{U}{I}$ (VI.31)

Leitwertoperator $Y = \frac{1}{Z} = j \omega \cdot C = j B_C$ (VI.32)

2.3 Spule

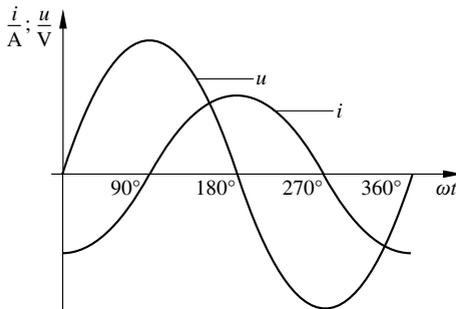


Bild VI-10 Verlauf von Strom und Spannung an einer Induktivität

Wird eine Spule an eine Wechselspannung angeschlossen, so ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz:

2. Kirchhoffsche Satz $u - L \frac{di}{dt} = 0$ (VI.33)

$u = L \frac{di}{dt}$ (VI.34)

$i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt = -\frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t$
(mit $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$) (VI.35)

Zwischen dem Strom i und der Spannung u besteht eine Phasenverschiebung von $\varphi = -90^\circ$ (Bild VI-10). Teilt man die Spannung durch den Strom, ergibt sich der *induktive Blindwiderstand* X_L

induktiver Blindwiderstand
 $|X_L| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \omega \cdot L$ $\frac{\omega}{\frac{1}{s}} \frac{L}{\frac{Vs}{A}}$ (VI.36)

induktiver Leitwert $B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ (VI.37)

Die Spule im Wechselstromkreis ist also nicht widerstandslos, obwohl der ohmsche Anteil vernachlässigt wird. Der induktive Blindwiderstand der Spule ist durch die auftretende Selbstinduktionsspannung an der Spule zu erklären. Diese Spannung der Spule bewirkt, daß der Spulenstrom der Wechselspannung um 90° nacheilt.

Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt die Gleichungen VI.38 bis VI.40.

ohmsches Gesetz $I = \frac{U}{Z}$ (VI.38)

Widerstandsoperator $Z = j \omega \cdot L = j X_L = \frac{U}{I}$ (VI.39)

Leitwertoperator $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{j \omega \cdot L} = -j B_L$ (VI.40)

■ **Beispiel:** Ein Widerstand von $R = 100 \Omega$ wird an einem Wechselstromnetz mit $U = 220 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

Zeigerdarstellung: $\hat{i} = I = \frac{\hat{u}}{R} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V}}{100 \Omega} = 2,2 \text{ A}$; Winkel ist nicht darstellbar.

Komplexe Darstellung: $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{100 \Omega \cdot e^{j0}} = 2,2 \text{ A} \cdot e^{j0}$

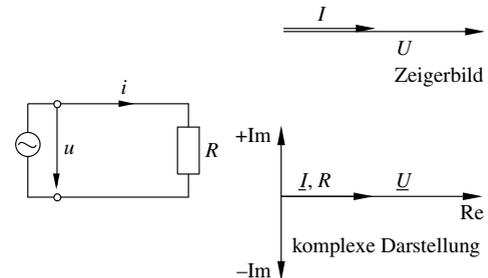


Bild VI-11 Darstellung von Strom und Spannung am ohmschem Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

■ **Beispiel:** Eine Induktivität von $L = 100 \text{ m} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ wird an einem Wechselstromnetz mit $U = 220 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

Zeigerdarstellung:

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt = -\frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{\omega \cdot L} = \frac{220 \text{ V}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 7 \text{ A}$$

Komplexe Darstellung:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U \cdot e^{j0}}{j\omega \cdot L} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}$$

$$= \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{31,42 \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} e^{j90}} = 7 \cdot A e^{-j90}$$

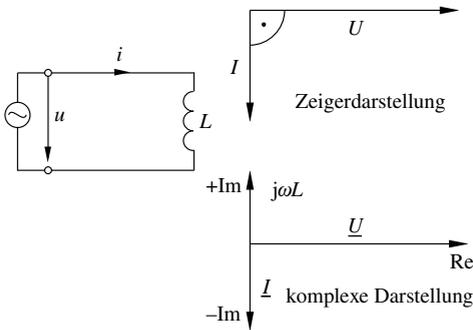


Bild VI-12 Darstellung von Strom und Spannung am induktiven Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

■ **Beispiel:** Eine Kapazität von $C = 100 \mu \frac{\text{As}}{\text{V}}$ wird an einem Wechselstromnetz mit $U = 220 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

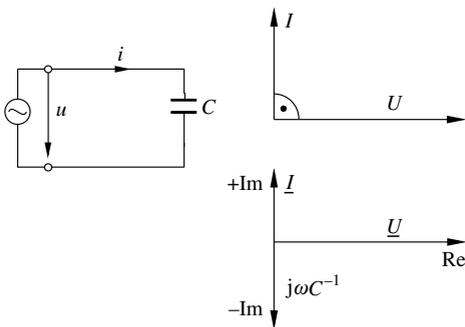


Bild VI-13 Darstellung von Strom und Spannung am kapazitiven Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

Zeigerdarstellung:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = \omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\Rightarrow I = \omega \cdot C \cdot U = 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 220 \text{ V} = 6,9 \text{ A}$$

Komplexe Darstellung:

$$I = \frac{U}{Z} = j \cdot \omega \cdot C \cdot U \cdot e^{j0} = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 220 \text{ V} e^{j0}$$

$$= 0,03142 \cdot \frac{\text{As}}{\text{V}} e^{j90} \cdot 220 \cdot e^{j0} \text{ V} = 6,9 \cdot A e^{j90}$$

3 Schaltungen von Wechselstromwiderständen

Bei der weiteren Betrachtung von Wechselstromwiderständen werden nur noch die Effektivwerte der Wechselstromgrößen verwendet. Es wird nicht mehr ausdrücklich darauf hingewiesen, ob es sich bei dem benutzten Wert um einen Operator oder um einen Zeiger handelt.

3.1 Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen

Im Zeigerbild für die Reihenschaltung drehen sich die Zeiger der Spannungen gleichmäßig um einen gemeinsamen Drehpunkt. Die Lage der Spannungen zueinander bleibt immer erhalten. Die Zeiger der Spannungen können also addiert oder subtrahiert werden. Da Wirk- und Blindanteil immer senkrecht aufeinander stehen, ist das *Spannungsdreieck* stets rechtwinklig.

Für die Größen im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\text{Gesamtspannung } U^2 = U_R^2 + U_B^2 \tag{VI.41}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_B^2} \tag{VI.42}$$

Wirkanteil der Spannung

$$U_R = \sqrt{U^2 - U_B^2} = U \cdot \cos \varphi \tag{VI.43}$$

Blindanteil der Spannung

$$U_B = \sqrt{U^2 - U_R^2} = U \cdot \sin \varphi \tag{VI.44}$$

3.1.1 Wirkwiderstand und Induktivität

Im allgemeinen enthält jede Induktionsspule neben dem induktiven Widerstand X_L auch einen ohmschen Widerstand R . Im Ersatzschaltbild werden beide Größen in Reihe geschaltet, da sie vom selben Strom durchflossen werden (Bild VI-14).

Der Strom erzeugt am Widerstand den Spannungsfall $U_R = I \cdot R$ und an der Induktivität den Spannungsfall $U_L = \omega \cdot L \cdot I$. Beide Spannungen haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die beiden Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung U . Nach Bild VI-15 liegt der Zeiger U_R in Richtung des Stroms I , der Zeiger U_L eilt dem Strom um 90° vor.

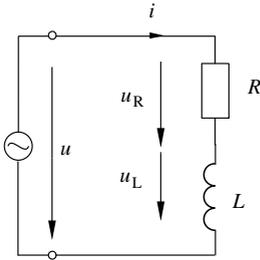


Bild VI-14 Induktivität und ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

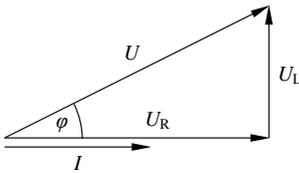


Bild VI-15 Zeigerbild der Reihenschaltung von ohmschen Widerstand und Induktivität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Spannungsdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

Gesamtspannung

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X_L^2 = I^2 (R^2 + X_L^2) \tag{VI.45}$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

Gesamtspannung $U = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2}$ (VI.46)

Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ (VI.47)

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand R und dem induktiven Blindwiderstand X_L entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-15.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \tag{VI.48}$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_L}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X_L}{I \cdot R} = \arctan \frac{X_L}{R} \tag{VI.49}$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot jX_L = \underline{I} \cdot (R + jX_L) = \underline{I} \cdot Z \tag{VI.50}$$

Scheinwiderstand $\underline{Z} = R + jX_L$ (VI.51)

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \tag{VI.52}$$

Phasenwinkel $\varphi = \arctan \frac{X_L}{R}$ (VI.53)

■ **Beispiel:** Eine Spule mit einem ohmschen Widerstand von $R = 100 \Omega$ und einem induktiven Blindwiderstand von $X_L = 200 \Omega$ wird an eine Spannung von $U = 200 \text{ V}$ angeschlossen. Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen des Ersatzschaltbildes auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom?

Zeigerdarstellung:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \text{ V}}{223,6 \Omega} = 0,89 \text{ A}$$

$$U_R = I \cdot R = 0,89 \text{ A} \cdot 100 \Omega = 89 \text{ V};$$

$$U_L = I \cdot X_L = 0,89 \text{ A} \cdot 200 \Omega = 178 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Komplexe Darstellung:

$$\varphi = \arctan \frac{X_L}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

$$\underline{Z} = R + jX_L = 100 \Omega + j200 \Omega = 223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4}} = 0,89 \text{ A} \cdot e^{-j63,4}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 0,89 \text{ A} \cdot e^{-j63,4} \cdot 100 \Omega \cdot e^{j0} = 89 \text{ V} \cdot e^{-j63,4}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot X_L = 0,89 \text{ A} \cdot e^{-j63,4} \cdot 200 \Omega \cdot e^{j90} = 178 \text{ V} \cdot e^{j26,6}$$

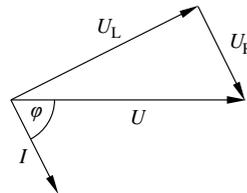


Bild VI-16 Beispiel: Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität

3.1.2 Wirkwiderstand und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand R und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C nach Ersatzschaltbild (Bild VI-17) in Reihe geschaltet, erzeugt der Strom am Widerstand den Spannungsfall $U_R = I \cdot R$ und an der Kapazität den Spannungsfall $U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I$.

Beide Spannungen haben im Zeigerbild verschiedenen Richtungen. Addiert ergeben die beiden Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung U . Nach Bild VI-18 liegt der Zeiger U_R in Richtung des Stroms I , der Zeiger U_C eilt dem Strom um 90° nach.

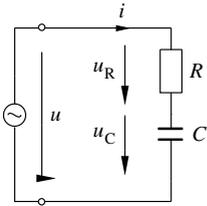


Bild VI-17
Kapazität und ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

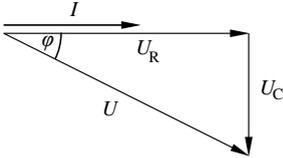


Bild VI-18 Zeigerbild der Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Spannungsdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

Gesamtspannung

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X_C^2 = I^2 (R^2 + X_C^2) \quad (VI.54)$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

Gesamtspannung $U = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (VI.55)$

Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (VI.56)$

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand R und dem kapazitiven Blindwiderstand X_C entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-18.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \quad (VI.57)$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_C}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X_C}{I \cdot R} = \arctan \frac{X_C}{R} \quad (VI.58)$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = I \cdot R + I \cdot jX_C = I \cdot (R + jX_C) = I \cdot \underline{Z} \quad (VI.59)$$

Scheinwiderstand $\underline{Z} = R + jX_C \quad (VI.60)$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (VI.61)$$

Phasenwinkel $\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} \quad (VI.62)$

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von $R = 100 \Omega$ und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von $X_C = 200 \Omega$ werden an eine Spannung von $U = 200 \text{ V}$ angeschlossen.

Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom?

Zeigerdarstellung:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \text{ V}}{223,6 \Omega} = 0,89 \text{ A}$$

$$U_R = I \cdot R = 0,89 \text{ A} \cdot 100 \Omega = 89 \text{ V};$$

$$U_C = I \cdot X_C = 0,89 \text{ A} \cdot 200 \Omega = 178 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Komplexe Darstellung:

$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

$$\underline{Z} = R - jX_C = 100 \Omega - j200 \Omega = 223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}}{223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ}} = 0,89 \text{ A} \cdot e^{j63,4^\circ}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 0,89 \text{ A} \cdot e^{j63,4^\circ} \cdot 100 \Omega \cdot e^{j0^\circ} = 89 \text{ V} \cdot e^{j63,4^\circ}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot X_C = 0,89 \text{ A} \cdot e^{j63,4^\circ} \cdot 200 \Omega \cdot e^{-j90^\circ} = 178 \text{ V} \cdot e^{-j26,6^\circ}$$

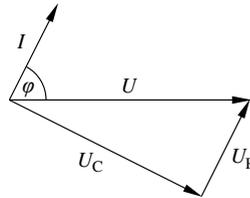


Bild VI-19 Beispiel: Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Kapazität

3.1.3 Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand R , eine Induktivität mit dem induktiven Blindwiderstand X_L und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C nach Bild VI-20 in Reihe geschaltet, erzeugt der Strom am Widerstand den Spannungsfall $U_R = I \cdot R$, an der Induktivität den Spannungsfall $U_L = \omega \cdot L \cdot I$ und an der Kapazität den

Spannungsfall $U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I$.

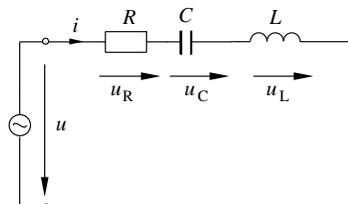


Bild VI-20 Kapazität, Induktivität und ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

Die Spannungen haben im Zeigerbild verschiedenen Richtungen. Addiert ergeben die Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung U . Nach Bild VI-21 liegt der Zeiger U_R in Richtung des Stroms I , der Zeiger U_C eilt dem Strom um 90° nach und der Zeiger U_L eilt dem Strom um 90° vor.

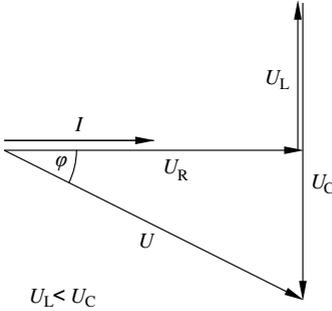


Bild VI-21 Zeigerbild der Reihenschaltung vom ohmschen Widerstand, Induktivität und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

Gesamtspannung

$$\begin{aligned} U^2 &= U_R^2 + U'^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \\ &= I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X'^2 = I^2 (R^2 + (X_L - X_C)^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.63})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Reihenschaltung von Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtspannung } U = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{VI.64})$$

$$\text{Scheinwiderstand } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{VI.65})$$

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand R und der Differenz des induktiven Blindwiderstandes X_L und des kapazitiven Blindwiderstand X_C entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-21.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \quad (\text{VI.66})$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{U'}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X'}{I \cdot R} \\ &= \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned} \quad (\text{VI.67})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

Gesamtspannung

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}' = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot (X_L - X_C) = \\ &= \underline{I} \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I} \cdot \underline{Z} \end{aligned} \quad (\text{VI.68})$$

$$\text{Scheinwiderstand } \underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) \quad (\text{VI.69})$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{VI.70})$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad (\text{VI.71})$$

Bei der Reihenschaltung von R , L und C stellt der ohmsche Widerstand den Realteil dar, während der Imaginärteil eine Zusammensetzung aus induktiven und kapazitiven Blindwiderstand ist. Der Imaginärteil kann verschiedene elektrische Eigenschaften aufweisen. Ist der induktive Anteil größer als der kapazitive, ergibt die Zusammenfassung einen induktiv wirkenden Blindwiderstand.

$$X_L > X_C \Rightarrow X' = X_{\text{Lers}} = X_L - X_C \quad (\text{VI.72})$$

Ist der kapazitive Anteil größer als der induktive, ergibt die Zusammenfassung einen kapazitiv wirkenden Blindwiderstand.

$$X_C > X_L \Rightarrow X' = X_{\text{cers}} = X_C - X_L \quad (\text{VI.73})$$

Sind kapazitiver und induktiver Anteil gleich groß, wird der Imaginärteil Null; die Schaltung hat einen rein ohmschen Charakter. In diesem Fall spricht man von einer Reihenresonanz.

Reihenresonanz

$$X_L = X_C \Rightarrow X' = 0 = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (\text{VI.74})$$

Über die Resonanzbedingung der Gleichung VI.74 kann die *Resonanzfrequenz* f_0 bzw. ω_0 berechnet werden.

Resonanzbedingung

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.75})$$

$$\text{Resonanzfrequenz } f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.76})$$

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von $R = 100 \Omega$, eine Induktivität mit einem induktiven Blindwiderstand von $X_L = 300 \Omega$ und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von $X_C = 200 \Omega$ werden an eine Spannung von $U = 200 \text{ V}$ angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt $f = 50 \text{ Hz}$.

Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom? Welche Resonanzfrequenz hat diese Schaltung?

Zeigerdarstellung:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{100^2 \Omega^2 + (300 \Omega - 200 \Omega)^2} = 141,4 \Omega \end{aligned}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \text{ V}}{141,4 \Omega} = 1,41 \text{ A}$$

$$U_R = I \cdot R = 1,71 \text{ A} \cdot 100 \ \Omega = 171 \text{ V};$$

$$U_L = I \cdot X_L = 1,71 \text{ A} \cdot 300 \ \Omega = 513 \text{ V};$$

$$U_C = I \cdot X_C = 1,71 \text{ A} \cdot 200 \ \Omega = 342 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R} = \arctan \frac{(300 \ \Omega - 200 \ \Omega)}{100 \ \Omega} = 45^\circ$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{300 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}};$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}} \cdot 200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = 40,84 \frac{1}{\text{s}}$$

Komplexe Darstellung:

$$\varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R} = \arctan \frac{300 \ \Omega - 200 \ \Omega}{100 \ \Omega} = 45^\circ$$

$$\underline{Z} = R - j(X_L - X_C) = 100 \ \Omega - j(300 - 200) \ \Omega = 141,4 \ \Omega \cdot e^{-j45}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{141,4 \ \Omega \cdot e^{-j45}} = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 100 \ \Omega \cdot e^{j0} = 171 \text{ V} \cdot e^{-j45}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot X_L = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 300 \ \Omega \cdot e^{j90} = 513 \text{ V} \cdot e^{j45}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot X_C = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 200 \ \Omega \cdot e^{-j90} = 342 \text{ V} \cdot e^{-j135}$$

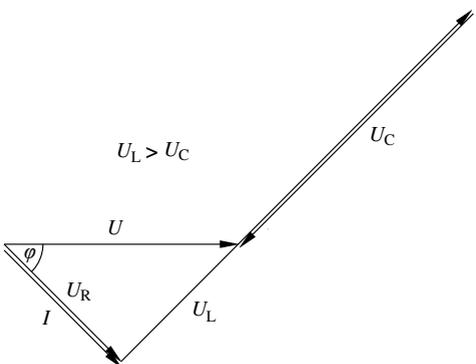


Bild VI-22 Beispiel: Reihenschaltung von ohmschen Widerstand, Induktivität und Kapazität

3.2 Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen

Im Zeigerbild für die Parallelschaltung drehen sich die Zeiger der Ströme gleichmäßig um einen gemeinsamen Drehpunkt. Die Lage der Ströme zueinander bleibt immer erhalten. Die Zeiger der Ströme können also addiert oder subtrahiert werden. Da Wirk- und Blindanteil immer senkrecht aufeinander stehen, ist das *Stromdreieck* stets rechtwinklig.

Für die Größen im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\text{Gesamtstrom } I^2 = I_R^2 + I_B^2 \tag{VI.77}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2} \tag{VI.78}$$

$$\text{Wirkstrom } I_R = \sqrt{I^2 - I_B^2} = I \cdot \cos \varphi \tag{VI.79}$$

$$\text{Blindstrom } I_B = \sqrt{I^2 - I_R^2} = I \cdot \sin \varphi \tag{VI.80}$$

3.2.1 Wirkwiderstand und Induktivität

Für jede Parallelschaltung gilt, daß der Gesamtstrom die Summe der Teilströme in den Parallelzweigen ist. In der Parallelschaltung gilt als wesentlicher Grundsatz, daß Leitwerte addiert werden können.

Sind ein Wirkwiderstand R und ein induktiver Blindwiderstand X_L parallelgeschaltet, treibt die anliegende Wechselspannung nach Bild VI-23 einen Wirkstrom

$$I_W = \frac{U}{R} = U \cdot G \text{ durch den Wirkwiderstand und einen}$$

Blindstrom $I_B = \frac{U}{X_L} = U \cdot B_L$ durch den Blindwiderstand.

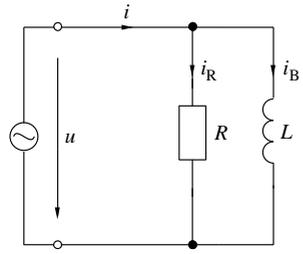


Bild VI-23 Parallelschaltung von Induktivität und ohmschem Widerstand im Wechselstromkreis

Der Wirkstrom zeigt in Richtung der Spannung U (Bild VI-24), der Blindstrom eilt um 90° nach.

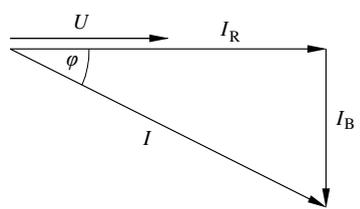


Bild VI-24 Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

Gesamtstrom

$$I^2 = I_R^2 + I_B^2 = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B_L^2 = U^2 \cdot (G^2 + B_L^2) \quad (\text{VI.81})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtstrom } I = U \cdot \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.82})$$

$$\text{Scheinleitwert } Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.83})$$

$$\text{Scheinwiderstand } Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B_L^2}} \quad (\text{VI.84})$$

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstandes R und dem Leitwert des induktiven Blindwiderstandes X_L entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-24.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \quad (\text{VI.85})$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_L}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B_L}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_L}{G} \quad (\text{VI.86})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{U} \cdot G + \underline{U} \cdot (-jB_L) = \underline{U} \cdot (G - jB_L) = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad (\text{VI.87})$$

$$\text{Scheinleitwert } \underline{Y} = G - jB_L \quad (\text{VI.88})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.89})$$

$$\text{Scheinwiderstand } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB_L} \quad (\text{VI.90})$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi = \arctan \frac{B_L}{G} \quad (\text{VI.91})$$

3.2.2 Wirkwiderstand und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand R und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C nach Ersatzschaltbild (Bild VI-25) parallel geschaltet, erzeugt die Spannung U durch den Widerstand den Strom $I_R = U \cdot G$ und durch die Kapazität den Strom $I_C = B_C \cdot U$. Beide Ströme haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die beiden Stromzeiger den Zeiger des Gesamtstromes I . Nach Bild VI-26 liegt der Zeiger I_R in Richtung der Spannung U ; der Zeiger I_C eilt der Spannung um 90° vor.

Das durch die Zeigeraddition entstehende Stromdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

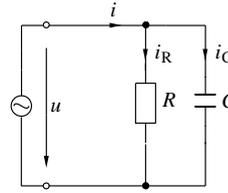


Bild VI-25

Parallelschaltung von Kapazität und ohmschen Widerstand im Wechselstromkreis

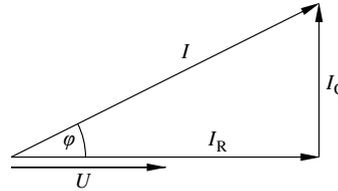


Bild VI-26 Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand und Kapazität

Gesamtstrom

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B_C^2 = U^2 (G^2 + B_C^2) \quad (\text{VI.92})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Kapazität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtstrom } I = U \cdot \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.93})$$

$$\text{Scheinleitwert } Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.94})$$

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstandes R und dem Leitwert des kapazitiven Blindwiderstandes X_C entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-26.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \quad (\text{VI.95})$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_C}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B_C}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_C}{G} \quad (\text{VI.96})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \underline{U} \cdot G + \underline{U} \cdot jB_C = \underline{U} \cdot (G + jB_C) = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad (\text{VI.97})$$

$$\text{Scheinleitwert } \underline{Y} = G + jB_C \quad (\text{VI.98})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.99})$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi = \arctan \frac{B_C}{G} \quad (\text{VI.100})$$

3.2.3 Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand R , eine Induktivität mit dem induktiven Blindwiderstand X_L und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C nach Ersatzschaltbild (Bild VI-27) parallel geschaltet, erzeugt die Spannung durch den Widerstand den Strom $I_R = U \cdot G$, durch die Induktivität den Strom $I_L = B_L \cdot U$ und durch die Kapazität den Strom $I_C = B_C \cdot U$. Die Ströme haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die Stromzeiger den Zeiger des Gesamtstroms I . Nach Bild VI-28 liegt der Zeiger I_R in Richtung der Spannung U , der Zeiger I_C eilt der Spannung um 90° vor und der Zeiger I_L eilt der Spannung um 90° nach.

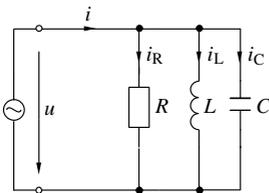


Bild VI-27 Parallelschaltung von Induktivität, Kapazität und ohmschen Widerstand im Wechselstromkreis

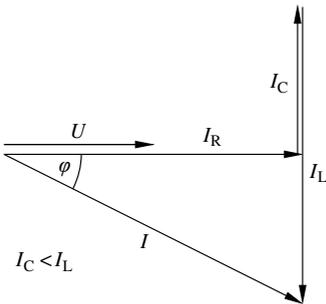


Bild VI-28 Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

Gesamtstrom

$$I^2 = I_R^2 + I'^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B'^2 = U^2 (G^2 + (B_C - B_L)^2) \tag{VI.101}$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis.

Gesamtstrom $I = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$ (VI.102)

Scheinleitwert $Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$ (VI.103)

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstand R und der Differenz des Leitwertes des kapazitiven Blindwiderstand X_C und des Leitwertes des induktiven Blindwiderstandes X_L entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung U und dem Strom I erhält man nach Bild VI-28.

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \tag{VI.104}$$

$$\varphi = \arctan \frac{I'}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B'}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_C - B_L}{G} \tag{VI.105}$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}' = \underline{U} \cdot G + \underline{U} \cdot j \cdot (B_C - B_L) = \underline{U} \cdot (G + j \cdot (B_C - B_L)) = \underline{U} \cdot \underline{Y} \tag{VI.106}$$

Scheinleitwert $\underline{Y} = G + j \cdot (B_C - B_L)$ (VI.107)

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \tag{VI.108}$$

Phasenwinkel $\varphi = \arctan \frac{(B_C - B_L)}{G}$ (VI.109)

Bei der Parallelschaltung von R , L und C stellt der ohmsche Widerstand den Realteil dar, während der Imaginärteil eine Zusammensetzung aus induktivem und kapazitivem Blindwiderstand ist. Der Imaginärteil kann verschiedene elektrische Eigenschaften aufweisen. Ist der induktive Anteil größer als der kapazitive, ergibt die Zusammenfassung einen induktiv wirkenden Leitwert.

$$B_L > B_C \Rightarrow B' = B_{Lers} = B_L - B_C \tag{VI.110}$$

Ist der kapazitive Anteil größer als der induktive, ergibt die Zusammenfassung einen kapazitiv wirkenden Leitwert.

$$B_C > B_L \Rightarrow B' = B_{Cers} = B_C - B_L \tag{VI.111}$$

Sind der kapazitive und der induktive Anteil gleich groß, wird der Imaginärteil Null; die Schaltung hat einen rein ohmschen Charakter. In diesem Fall spricht man von einer Parallelresonanz.

Parallelresonanz

$$B_L = B_C \Rightarrow B' = 0 = \omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L} \tag{VI.112}$$

Über die Resonanzbedingung der Gleichung (VI.112) kann die *Resonanzfrequenz* f_0 bzw. ω_0 berechnet werden.

Resonanzbedingung

$$\omega_0 \cdot C = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.113})$$

Resonanzfrequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$ (VI.114)

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von $R = 100 \Omega$, eine Induktivität mit einem induktiven Blindwiderstand von $X_L = 300 \Omega$ und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von $X_C = 200 \Omega$ werden an eine Spannung von $U = 200 \text{ V}$ angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt $f = 50 \text{ Hz}$.

Wie groß sind Scheinleitwert und Gesamtstromstärke? Welche Ströme fließen durch die Bauelemente, welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom? Welche Resonanzfrequenz hat diese Schaltung?

Zeigerdarstellung:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{100 \Omega} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ S};$$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{300 \Omega} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ S};$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{200 \Omega} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{(10 \cdot 10^{-3})^2 \text{ S}^2 + (5 \cdot 10^{-3} \text{ S} - 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ S})^2} = 10,14 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$I = U \cdot Y = 200 \text{ V} \cdot 10,14 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 2,03 \text{ A}$$

$$I_R = U \cdot G = 200 \text{ V} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 2 \text{ A};$$

$$I_L = U \cdot B_L = 200 \text{ V} \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 0,66 \text{ A};$$

$$I_C = U \cdot B_C = 200 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ S} = 1 \text{ A}$$

$$\varphi = \arccos \frac{G}{Y} = \arccos \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ S}}{10,14 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 9,5^\circ$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{300 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}};$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}} \cdot 200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = 40,84 \frac{1}{\text{s}}$$

Komplexe Darstellung:

$$\underline{Y} = G - j(B_C - B_L) = 10 \cdot 10^{-3} \text{ S} - j(5 \cdot 10^{-3} - 3,3 \cdot 10^{-3}) \text{ S} = 10,14 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j9,6}$$

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = 200 \text{ V} \cdot e^{j0} \cdot 10,14 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j9,6} = 2,03 \text{ A} \cdot e^{j9,6}$$

$$\underline{I}_R = \underline{U} \cdot \underline{G} = 200 \text{ V} \cdot e^{j0} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0} = 2 \text{ A} \cdot e^{j0}$$

$$\underline{I}_L = \underline{U} \cdot \underline{B}_L = 200 \text{ V} \cdot e^{j0} \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{-j90} = 0,66 \text{ A} \cdot e^{-j90}$$

$$\underline{I}_C = \underline{U} \cdot \underline{B}_C = 200 \text{ V} \cdot e^{j0} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j90} = 1 \text{ A} \cdot e^{j90}$$

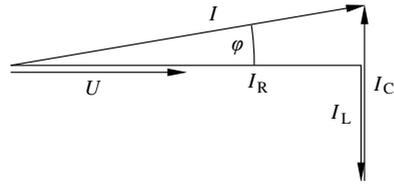


Bild VI-29 Beispiel: Parallelschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

3.3 Gemischte Schaltungen

Die Lösung von gemischten Schaltungen im Wechselstromkreis kann ebenfalls mit Hilfe der Zeigerdarstellung und der komplexen Rechnung erfolgen. Der Lösungsweg soll an einem Beispiel (Bild VI-30) dargestellt werden.

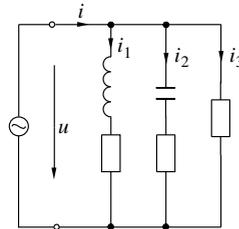


Bild VI-30 Gemischte Schaltung im Wechselstromkreis

■ **Beispiel:** Lösung mit Hilfe der Zeigerdarstellung:

$$U = 200 \text{ V}; \quad f = 50 \text{ Hz}$$

Parallelzweig 1 mit Widerstand $R_1 = 100 \Omega$ und Spule $X_L = 200 \Omega$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{200 \text{ V}}{223,6 \Omega} = 0,89 \text{ A}$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{X_L}{R_1} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Strom eilt der Spannung nach!

Parallelzweig 2 mit Widerstand $R_2 = 100 \Omega$ und Kapazität $X_C = 200 \Omega$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{200 \text{ V}}{223,6 \Omega} = 0,89 \text{ A}$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{X_C}{R_2} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Strom eilt der Spannung vor!

Parallelzweig 3 mit Widerstand $R_3 = 200 \Omega$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{200 \text{ V}}{200 \Omega} = 1 \text{ A}$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{0}{R_3} = 0^\circ$$

Die rechnerische Addition der Ströme kann erfolgen, wenn die Zweigströme in ihre Real- und Blindstromanteile aufgelöst werden.

$$I_{IR} = I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0,89 \text{ A} \cdot \cos(-63,4^\circ) = 0,89 \text{ A} \cdot 0,448 = 0,399 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}
 I_{1B} &= I_1 \cdot \sin \varphi_1 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(-63,4^\circ) \\
 &= 0,89 \text{ A} \cdot (-0,894) = -0,796 \text{ A} \\
 I_{2R} &= I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0,89 \text{ A} \cdot \cos(63,4^\circ) \\
 &= 0,89 \text{ A} \cdot 0,448 = 0,399 \text{ A} \\
 I_{2B} &= I_2 \cdot \sin \varphi_2 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(63,4^\circ) \\
 &= 0,89 \text{ A} \cdot 0,894 = 0,796 \text{ A} \\
 I_{3R} &= I_3 \cdot \cos \varphi_3 = 0,89 \text{ A} \cdot \cos(0^\circ) = 1 \text{ A} \cdot 1 = 1 \text{ A} \\
 I_{3B} &= I_3 \cdot \sin \varphi_3 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(0^\circ) = 1 \text{ A} \cdot 0 = 0 \text{ A} \\
 I_{\text{gesR}} &= I_{1R} + I_{2R} + I_{3R} = 0,399 \text{ A} + 0,399 \text{ A} + 1 \text{ A} = 1,798 \text{ A} \\
 I_{\text{gesB}} &= I_{1B} + I_{2B} + I_{3B} = -0,796 \text{ A} + 0,796 \text{ A} + 0 \text{ A} = 0 \text{ A} \\
 I_{\text{ges}} &= \sqrt{I_{\text{gesR}}^2 + I_{\text{gesB}}^2} = \sqrt{1,798^2 + 0^2} \text{ A} = 1,798 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Die zeichnerische Lösung erfolgt durch Addition der Stromzeiger nach Bild VI-31

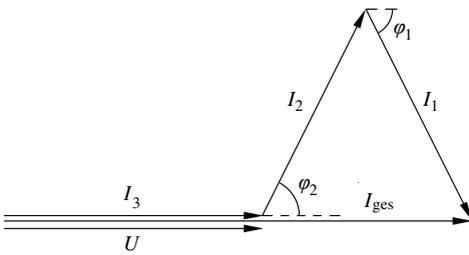


Bild VI-31 Beispiel: Gemischte Schaltung im Wechselstromkreis in der Zeigerdarstellung

Lösung in der komplexen Darstellung:

In der komplexen Darstellung wird zuerst die *Gesamtimpedanz* Z_{ges} ermittelt.

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= R_1 + jX_L = 100 \Omega + j200 \Omega = 223,6 \Omega \cdot e^{j63,4^\circ} \\
 Z_2 &= R_2 - jX_C = 100 \Omega - j200 \Omega = 223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ} \\
 Z_3 &= R_3 + j0 = 200 \Omega + j0 = 200 \Omega \cdot e^{j0}
 \end{aligned}$$

In der Parallelschaltung können Leitwerte addiert werden, die Impedanzen müssen also in Leitwerte umgerechnet werden.

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{223,6 \Omega \cdot e^{j63,4^\circ}} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{-j63,4^\circ} \\
 &= (2,0 - j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} \\
 Y_2 &= \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{223,6 \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ}} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j63,4^\circ} \\
 &= (2,0 + j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} \\
 Y_3 &= \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{200 \Omega \cdot e^{j0}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0} = (5,0 - j0) \cdot 10^{-3} \text{ S} \\
 Y_{\text{ges}} &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\
 &= (2,0 + j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} + (2,0 - j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} + (5,0 - j0) \cdot 10^{-3} \text{ S} \\
 &= (9,0 + j0) \cdot 10^{-3} \text{ S} = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0} \\
 I_{\text{ges}} &= \underline{U} \cdot Y_{\text{ges}} = (200 \text{ V} \cdot e^{j0}) \cdot (9 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0}) = 1,8 \text{ A} \cdot e^{j0}
 \end{aligned}$$

4 Passive Filter

Passive Filter sind Schaltungen mit einem frequenzabhängigen Übertragungsverhältnis der Eingangsgröße zur Ausgangsgröße. Sie bestehen aus einer

Zusammenschaltung von ohmschen Widerständen R , Kapazitäten C und Induktivitäten L zu komplexen Netzwerken.

Ein Filter ist ein Netzwerk, das aus einem Frequenzgemisch einen bestimmten Frequenzbereich hervorhebt und einen anderen unterdrückt.

Im Durchlaßbereich der Filter werden die zu übertragenden Größen kaum, im Sperrbereich dagegen stark gedämpft. Der Übergang von Sperr- in den Durchlaßbereich wird durch die *Grenzfrequenz* f_G festgelegt.

Nach der Lage der Sperr- bzw. Durchlaßbereiche unterscheidet man zwischen *Tief-, Hoch- und Bandpaßschaltungen*.

4.1 Hochpaßschaltung mit RC- und RL-Glied

Das in Bild VI-32 dargestellte RC-Glied stellt einen Hochpaß dar.

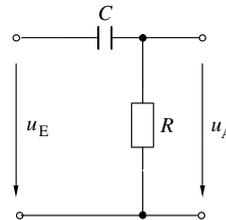


Bild VI-32 Hochpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Für die Filter sind Grenzfrequenz und Phasengang von besonderem Interesse. Die Grenzfrequenz ist die Frequenz, bei der das Verhältnis Ausgangsspannung U_A zu Eingangsspannung U_E den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ beträgt.

Das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung wird *Amplitudengang* genannt.

Amplitudengang (RC)

$$\left| \frac{U_A}{U_E} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot C \cdot R)^2}}} \quad (\text{VI.115})$$

Der Amplitudengang hat für den Fall $R = \frac{1}{\omega \cdot C}$ den Wert

$$\left| \frac{U_A}{U_E} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\omega \cdot C \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{VI.116})$$

Aus (VI.116) ergibt sich die Grenzfrequenz:

$$\text{Grenzfrequenz (RC)} \quad f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{VI.117})$$

Der *Phasengang*, die Abhängigkeit des Winkels φ zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung, ist stark von der Frequenz abhängig.

Phasengang $\arctan \varphi = f(\omega)$ (VI.118)

Der Winkel φ nimmt für verschiedene Frequenzen unterschiedliche Werte an. Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan \frac{C \cdot R}{C \cdot R} = \arctan(1) = 45^\circ$$

(Grenzfrequenz)

$$\omega = \infty \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(0) = 0^\circ$$

Im Bild VI-33 sind Amplituden- und Phasengang einer Hochpaßschaltung dargestellt.

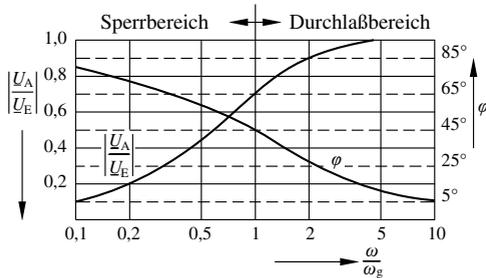


Bild VI-33 Amplituden- und Phasengang der Hochpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Wird anstatt des RC-Gliedes ein RL-Glied (Bild VI-34) als Hochpaß eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen (VI.119 und VI.120):

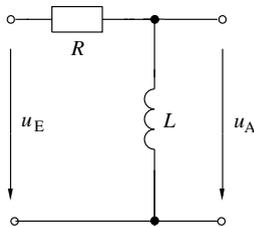


Bild VI-34 Hochpaßschaltung mit Induktivität und ohmschem Widerstand

Amplitudengang (RL)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega \cdot L}\right)^2}} \quad (VI.119)$$

Grenzfrequenz (RL) $f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$ (VI.120)

4.2 Tiefpaßschaltung mit RC- und RL-Glied

Das in Bild VI-35 dargestellte RC-Glied stellt einen Tiefpaß dar.

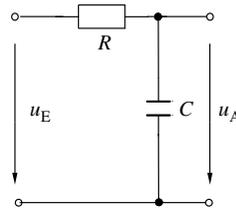


Bild VI-35 Tiefpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Für einen RC-Tiefpaß ergeben sich die charakterisierenden Gleichungen (VI.121 bis VI.123):

Amplitudengang (RC)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}} \quad (VI.121)$$

Der Amplitudengang hat für den Fall $R = \frac{1}{\omega \cdot C}$ den Wert

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \cdot C \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (VI.122)$$

Daraus folgt die Grenzfrequenz

Grenzfrequenz (RC) $f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$ (VI.123)

Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \omega \cdot C \cdot R = \arctan \frac{C \cdot R}{C \cdot R} = \arctan(1) = 45^\circ$$

(Grenzfrequenz)

$$\omega = \infty \quad \varphi = \arctan \omega \cdot C \cdot R = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

Im Bild VI-36 sind Amplituden- und Phasengang einer Tiefpaßschaltung dargestellt.

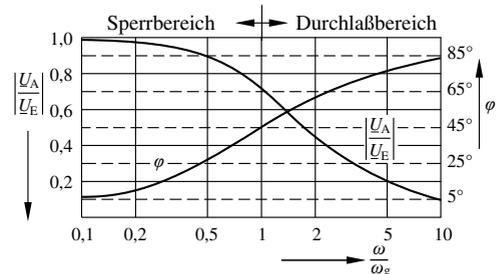


Bild VI-36 Amplituden- und Phasengang der Tiefpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Wird anstatt des RC-Gliedes ein RL-Glied (Bild VI-37) als Tiefpaß eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen (VI.124 und VI.125):

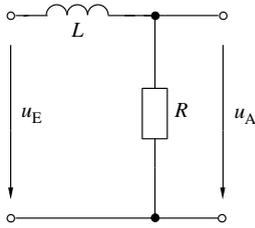


Bild VI-37
Tiefpaßschaltung mit Induktivität und ohmschem Widerstand

Amplitudengang (RL)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega \cdot L}\right)^2}} \quad (VI.124)$$

Grenzfrequenz (RL) $f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$ (VI.125)

4.3 Bandpaßschaltung

Bei einem Bandpaß sind zwei verschiedene Filter (Hoch- und Tiefpaß) hintereinander geschaltet (Bild VI-38).

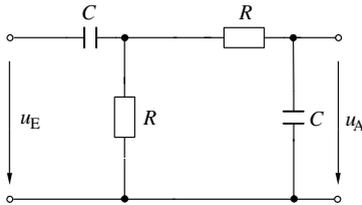


Bild VI-38 Bandpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Ein Bandpaß überträgt zwischen zwei Grenzfrequenzen eine Eingangsspannung an einen Ausgang mit

einem Verhältnis $\frac{|U_A|}{|U_E|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|U_A|_{\max}}{|U_E|}$.

Die Differenz der beiden Grenzfrequenzen wird als *Bandbreite B* bezeichnet.

Bandbreite $B = f_{go} - f_{gu}$ (VI.126)

Für den Bandpaß nach Bild VI-38 folgt für die Ausgangsspannung:

Ausgangsspannung Bandpaß

$$U_A = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot U_E \quad (VI.127)$$

$$U_A = \frac{j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC} \cdot U_E \quad (VI.128)$$

Amplitudengang (BP)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{[(\omega RC)^2 - 1]^2}{(\omega RC)^2}}} \quad (VI.129)$$

Die Ausgangsspannung für den Bandpaß wird maximal, wenn der Faktor $\omega RC = 1$ wird.

maximale Ausgangsspannung

$$|U_A|_{\max} = \frac{1}{3} \cdot |U_E| \quad (VI.130)$$

Die Grenzfrequenzen stellen sich bei einem Bandpaß für folgende Frequenz ein:

untere Grenzfrequenz

$$f_{gu} = 0.303 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (VI.131)$$

obere Grenzfrequenz

$$f_{go} = 3.303 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (VI.132)$$

Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \arctan \frac{1 - 1}{3} = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \infty$$

$$\varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \frac{-\infty^2}{3 \cdot \infty} = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

Im Bild VI-39 sind Amplituden- und Phasengang einer Bandpaßschaltung dargestellt.

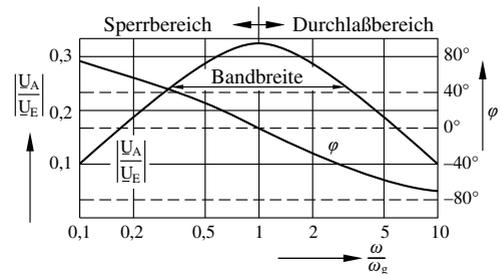


Bild VI-39 Amplituden- und Phasengang der Bandpaßschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

5 Schwingkreise

Anstelle der Bandpaßschaltungen können bestimmte Frequenzbereiche auch durch eine Zusammenschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und

Kapazität hervorgehoben oder bedämpft werden. Diese Schaltungen werden als Schwingkreise bezeichnet.

5.1 Reihenresonanz

Bei der Reihenschaltung stellt sich für die Resonanzfrequenz f_r der maximale Strom $I_r = \frac{U}{R}$ ein, da sich die Blindwiderstände gegenseitig kompensieren.

$$\text{Resonanzfrequenz } f_r = \frac{\omega_r}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.133})$$

Die Reihenschaltung verhält sich nach außen wie ein rein ohmscher Widerstand mit dem Phasenwinkel $\varphi = 0^\circ$. Innerhalb der Reihenschaltung erreichen die Spannungen an Induktivität und Kapazität wesentlich höhere Werte als die Klemmenspannung.

Resonanzspannung an der Induktivität

$$U_{rL} = I_r \cdot \omega_r \cdot L \quad (\text{VI.134})$$

Resonanzspannung an der Kapazität

$$U_{rC} = \frac{I_r}{\omega_r \cdot C} \quad (\text{VI.135})$$

Die beiden Resonanzspannungen sind gleich groß, haben ihr Maximum jedoch um 180° verschoben.

Die im Kreis auftretenden Verluste werden über den *Dämpfungsfaktor* d angegeben. Der Dämpfungsfaktor beinhaltet die an der Spule, am Kondensator und am Widerstand auftretenden ohmschen Verluste im Verhältnis zum Blindwiderstand.

$$\text{Dämpfungsfaktor } d = \frac{R}{\omega_r \cdot L} \quad (\text{VI.136})$$

Der Kehrwert des Dämpfungsfaktors wird als *Güte* Q des Schwingkreises bezeichnet.

$$\text{Kreisgüte } Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_r \cdot L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{VI.137})$$

Die Güte des Reihenschwingkreises wird größer, wenn die Induktivität größer und die Kapazität kleiner wird. Mit Hilfe der Güte kann die Bandbreite des Reihenschwingkreises bestimmt werden.

$$\text{Bandbreite } \Delta f = f_{go} - f_{gu} = \frac{f_r}{Q} = f_r \cdot d \quad (\text{VI.138})$$

Bei den Grenzfrequenzen erreicht die Gesamtimpedanz Z des Kreises den $\sqrt{2}$ -fachen Wert der Resonanzimpedanz.

$$Z_{go} = Z_{gu} = \sqrt{2} \cdot Z_r \quad (\text{VI.139})$$

5.2 Parallelresonanz

Ein Parallelschwingkreis ist die Zusammenschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität. Bei der Parallelschaltung stellt sich für die

Resonanzfrequenz f_r der minimale Strom $I_r = \frac{U}{R}$ ein, da sich die Blindwiderstände gegenseitig kompensieren.

Resonanzfrequenz

$$f_r = \frac{\omega_r}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.140})$$

Die Parallelschaltung verhält sich nach außen wie ein rein ohmscher Widerstand mit dem Phasenwinkel $\varphi = 0^\circ$. Innerhalb der Parallelschaltung erreichen die Ströme durch die Induktivität und die Kapazität wesentlich höhere Werte als der Strom in der Zuleitung.

Resonanzstrom durch die Induktivität

$$I_{rL} = \frac{U}{\omega_r \cdot L} \quad (\text{VI.141})$$

Resonanzstrom durch die Kapazität

$$I_{rC} = U \cdot \omega_r \cdot C \quad (\text{VI.142})$$

Die beiden Resonanzströme sind gleich groß, haben ihr Maximum jedoch um 180° verschoben.

Die im Kreis auftretenden Verluste werden wie bei der Reihenresonanz über den *Dämpfungsfaktor* d angegeben.

$$\text{Dämpfungsfaktor } d = \frac{\omega_r \cdot L}{R} \quad (\text{VI.143})$$

$$\text{Kreisgüte } Q = \frac{1}{d} = \frac{R}{\omega_r \cdot L} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{VI.144})$$

Die Güte des Reihenschwingkreises wird größer, wenn die Induktivität kleiner und die Kapazität größer wird.

$$\text{Bandbreite } \Delta f = f_{go} - f_{gu} = \frac{f_r}{Q} = f_r \cdot d \quad (\text{VI.145})$$

Bei den Grenzfrequenzen erreicht die Gesamtimpedanz Z des Kreises den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert der Resonanzimpedanz.

$$Z_{go} = Z_{gu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Z_r \quad (\text{VI.146})$$

6 Leistung und Arbeit im Wechselstromkreis

6.1 Leistung und Arbeit bei Phasengleichheit von Spannung und Strom

Die Berechnung der Leistung im Gleichstromkreis erfolgt nach der Gleichung VI.147.

$$\text{Leistung im Gleichstromkreis } P = U \cdot I \quad (\text{VI.147})$$

Die Leistung im Wechselstromkreis kann analog zur Berechnung der Leistung im Gleichstromkreis für Werte erfolgen, die zeitlich zusammenfallen. Die Augenblicks- (Momentan-) Leistung ergibt sich zu:

$$\text{Momentanleistung } p = u \cdot i \quad (\text{VI.148})$$

Da am Wirkwiderstand Spannung und Strom gleiche Phasenlage haben, folgt

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \sin^2 \omega \cdot t. \quad (\text{VI.149})$$

Das Liniendiagramm (Bild VI-40) zeigt, daß die Leistung mit doppelter Frequenz oberhalb der Nullachse um den Wert $p_m = \frac{\hat{p}}{2}$ schwingt.

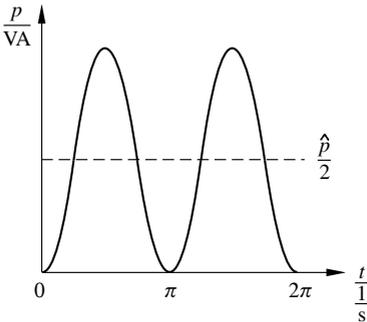


Bild VI-40 Liniendiagramm der Leistung

Der Mittelwert der Leistung berechnet sich zu:

Mittelwert der Leistung

$$p_m = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t dt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = U \cdot I \quad (\text{VI.150})$$

Aus Gleichung (VI.150) ergibt sich, daß die Wirkleistung eines Wechselstroms in einem Stromkreis, der nur mit einem Wirkwiderstand belastet ist, gleich dem Produkt aus den Effektivwerten von Spannung und Stromstärke ist

$$\text{Wirkleistung } P = U \cdot I \quad \frac{P}{VA} = W \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \quad (\text{VI.151})$$

Die Stromarbeit ist das Produkt der Wirkleistung P und der Zeit t .

$$\text{Stromarbeit } W = P \cdot t \quad \frac{W}{Wh} \left| \frac{P}{W} \right| \left| \frac{t}{h} \right| \quad (\text{VI.152})$$

6.2 Leistung und Arbeit bei Phasenverschiebung von Spannung und Strom

Sind die Spannungs- und Stromwellen phasenverschoben (Bild VI-41), wird die Augenblicksleistung in den Bereichen negativ, in denen Spannung und Strom entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Mittelwert der Leistung verschiebt sich in Richtung Zeitachse. Die Wirkleistung wird also durch die Phasenverschiebung kleiner und erreicht ein Mini-

um, wenn die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom 90° beträgt (Bild VI-42).

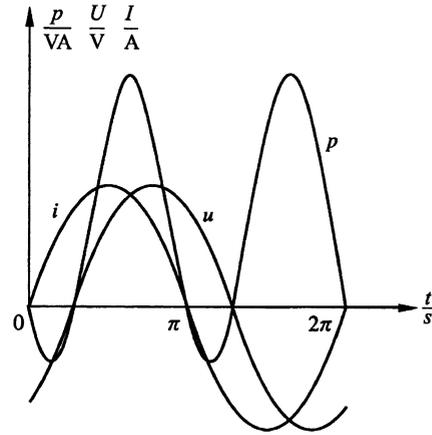


Bild VI-41 Liniendiagramm der Leistung bei einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

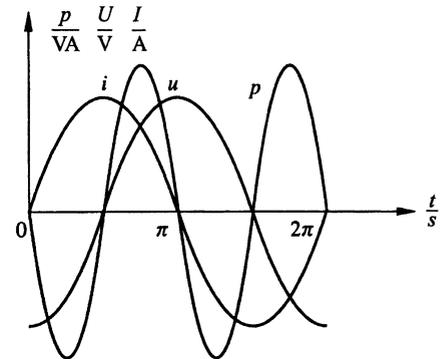


Bild VI-42 Liniendiagramm der Leistung bei einer Phasenverschiebung von 90 Grad zwischen Strom und Spannung

Der Mittelwert der Leistung liegt im Bild VI-42 auf der Zeitachse und hat den Wert Null. Die Leistungskurve besteht aus positiven und negativen Halbwellen gleicher Größe, die Wirkleistung hat den Wert $P = 0$.

Beträgt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung 90° , hat der Stromkreis eine rein induktive oder kapazitive Last. Der Effektivwert der Leistungskurve kann wiederum durch die Effektivwerte von Strom und Spannung bestimmt werden. Es handelt sich bei dieser Leistung jedoch um keine Wirkleistung, sondern um *Blindleistung* Q .

$$\text{Blindleistung } (\varphi = 90^\circ) Q = U \cdot I \quad (\text{VI.153})$$

Von *Wirkleistung* spricht man, wenn Strom und Spannung keine Phasenverschiebung ($\varphi = 0^\circ$) aufweisen, die Zeiger beider Größen also gleiche Richtung haben.

Von *Blindleistung* spricht man, wenn Strom und Spannung eine Phasenverschiebung von 90° haben, die Zeiger beider Größen einen rechten Winkel bilden.

Liegt der Phasenwinkel zwischen 0° und 90° , kann die Wirkleistung ermittelt werden, indem eine Zeigergröße in den Winkel 0° gelegt und die andere Zeigergröße in ihre Komponenten zerlegt wird, die in Richtung 0° und 90° zeigen (Bild VI-43).

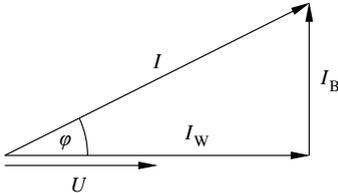


Bild VI-43 Zeigerdiagramm von Strom und Spannung bei beliebigem Winkel

Im Bild VI-43 wird die Spannung nicht verschoben und der Strom in den *Wirkstrom* I_W und den *Blindstrom* I_B aufgeteilt.

$$\text{Wirkstrom } I_W = I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.154})$$

$$\text{Blindstrom } I_B = I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.155})$$

Für die entsprechenden Leistungen folgt:

$$\text{Wirkleistung } P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.156})$$

$$\text{Blindleistung } Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.157})$$

Wirkleistung und Blindleistung haben ihre Maxima im Liniendiagramm um 90° verschoben, das heißt, man kann die beiden Leistungsanteile als Zeiger darstellen, die einen Winkel von 90° einschließen. Zwischen resultierendem Zeiger und Wirkleistung ist der Winkel φ (Bild VI-44).

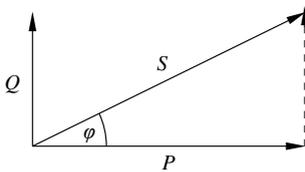


Bild VI-44 Zeigerdiagramm der Leistung bei beliebigem Winkel (Operatoren)

Der resultierende Zeiger stellt die *Scheinleistung* S dar.

$$\text{Scheinleistung } S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{VI.158})$$

$$S = P \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.159})$$

$$S = Q \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.160})$$

$$S = P \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi = U \cdot I \quad (\text{VI.161})$$

Die bei effektiver Spannung U und Stromstärke I abgegebene nutzbare Leistung beträgt also nur den durch den Faktor $\cos \varphi$ gegebenen Teil der Schein-

leistung. Der andere Teil pendelt als Blindleistung zwischen der Spannungsquelle und dem Verbraucher hin und her.

Zur Unterscheidung der verschiedenen Leistungsarten, hat man unterschiedliche Maßbezeichnungen eingeführt, und zwar mißt man die Wirkleistung in $[P] = \text{W}$, die Scheinleistung in $[S] = \text{VA}$ und die Blindleistung in $[Q] = \text{var}$.

6.3 Leistung in komplexer Schreibweise

Die Leistung ist definiert als $S = U \cdot I$. Hieraus ergibt sich für die komplexe Schreibweise in der Exponentialform:

komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{-j\varphi_I} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \quad (\text{VI.162})$$

Die komplexe Leistung ist das Produkt aus der komplexen Spannung \underline{U} und dem konjugiert komplexen Strom \underline{I}^* .

Da $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ die Verschiebung zwischen Spannung \underline{U} und Strom \underline{I} darstellt, gilt:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (\text{VI.163})$$

Aus der vorhergehenden Definition ergeben sich die Gleichungen (VI.164) bis (VI.166).

$$\text{Wirkleistung } P \quad \text{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.164})$$

$$\text{Blindleistung } Q \quad \text{Im}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.165})$$

$$\text{Scheinleistung } S \quad |\underline{U} \cdot \underline{I}^*| = U \cdot I \quad (\text{VI.166})$$

■ **Beispiel:** Ein induktiver Verbraucher nimmt bei $U_n = 220 \text{ V}$ einen Strom $I = 2 \text{ A}$ auf. Der Winkel zwischen Strom und Spannung beträgt $\varphi = 40^\circ$.

Welchen Wert haben a) die Scheinleistung, b) die Wirkleistung und c) die Blindleistung?

$$\text{a) } S = U \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 440 \text{ VA}$$

$$\text{b) } P = S \cdot \cos \varphi = 440 \text{ VA} \cdot 0,766 = 337 \text{ W}$$

$$\text{c) } Q = S \cdot \sin \varphi = 440 \text{ VA} \cdot 0,643 = 283 \text{ var}$$

6.4 Leistungsfaktor

Die von einem Verbraucher aufgenommene Wirkleistung ist über den Faktor $\cos \varphi$ mit der Scheinleistung verknüpft. Der Faktor $\cos \varphi$ wird daher als *Leistungsfaktor* bezeichnet.

$$\text{Leistungsfaktor } \cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (\text{VI.167})$$

Der Leistungsfaktor gibt an, wieviel Prozent der *Scheinleistung* S als *Wirkleistung* P im Verbraucher umgesetzt werden.

In der Praxis soll der Leistungsfaktor möglichst nahe bei Eins liegen, damit die Zuleitungen nicht unnötig mit Blindstrom belastet werden, da dieser Blindstrom auf der Zuleitung Verluste erzeugt.

VII Drehstrom

1 Erzeugung von mehrphasigem Wechselstrom

Dreht man in einem homogenen Magnetfeld drei in einem Winkel von 120° versetzte gleiche Spulen (Bild VII-1) mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so werden folgende Spannungen in den Spulen induziert:

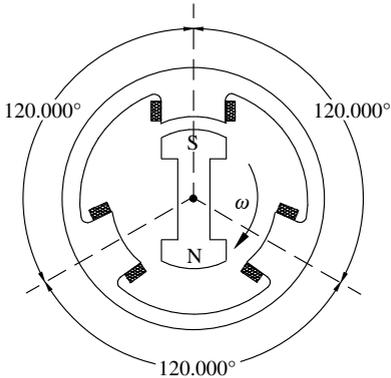


Bild VII-1 Erzeugen eines Dreiphasensystems

$$\text{Spannung Spule 1} \quad u_1 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (\text{VII.1})$$

$$\text{Spannung Spule 2} \quad u_2 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \quad (\text{VII.2})$$

$$\text{Spannung Spule 3} \quad u_3 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + 240^\circ) \quad (\text{VII.3})$$

Das Zeigerdiagramm der erzeugten Spannung ist in Bild VII-2 dargestellt.

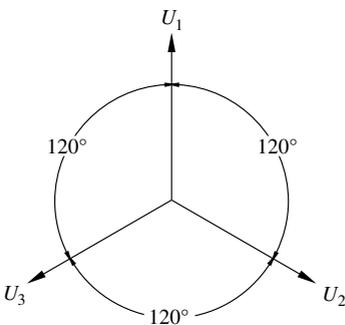


Bild VII-2 Zeigerdiagramm der Spannungen gemäß Bild VII-1

Schließt man an jede der Spulen einen ohmschen Verbraucher mit gleichen Werten an, so treiben die Spannungen einen Strom durch die Verbraucher, der gleiche Amplitude hat, aber jeweils um den Winkel von 120° versetzt ist. Solche voneinander unabhängigen Dreiphasensysteme werden in der Praxis nicht

verwendet, da sie einen hohen Aufwand an Leitungsmaterial erfordern und keinen Vorteil gegenüber Wechselstromsystemen bieten.

2 Phasenverkettung

Betrachtet man die im Dreiphasensystem erzeugten Spannungen in einem beliebigen Zeitpunkt, so ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

Zeitpunkt $\varphi = 0^\circ$

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 0,866 \cdot \hat{u}; \quad u_3 = -0,866 \cdot \hat{u}$$

Zeitpunkt $\varphi = 90^\circ$

$$u_1 = \hat{u}; \quad u_2 = -0,5 \cdot \hat{u}; \quad u_3 = -0,5 \cdot \hat{u}$$

Zeitpunkt $\varphi = 240^\circ$

$$u_1 = -0,866 \cdot \hat{u}; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0,866 \cdot \hat{u}$$

Bei der Bildung der Summen der Augenblickswerte erkennt man, daß zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Gesamtspannung der drei Stromkreise den Wert Null ergibt. Da die induzierten Spannungen stets in ihrer Addition den Wert Null ergeben, können die Spulen an einem Spulenende zusammengefaßt werden, ohne daß ein Kurzschluß entsteht (Bild VII-3). Werden die Spulen derart zusammengefaßt, spricht man von einer *Verkettung*. Man unterscheidet zwei Arten der Verkettung: die *Sternschaltung* und die *Dreieckschaltung*.

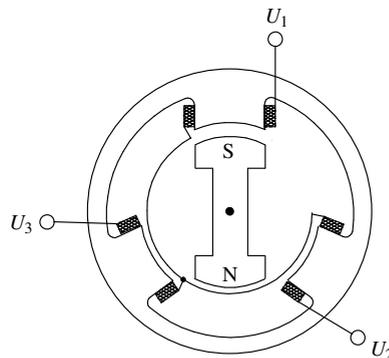


Bild VII-3 Verkettung eines Dreiphasensystems

2.1 Sternschaltung

Eine Sternschaltung erhält man, wenn die Enden der drei Generatorspulen in einem Punkt, dem *Sternpunkt*, zusammengeschaltet werden (Bild VII-4). Die in den Spulen induzierte Spannung wird *Strangspannung* U_{Str} genannt; die zwischen den Abgangsklemmen des Generators gemessene Spannung ist die *Leiterspannung* U_L .

Ein Zusammenhang zwischen den Strangwerten und den Leiterwerten des symmetrischen Drehstromsystems in Sternschaltung ist im Bild VII-5 zu erkennen.

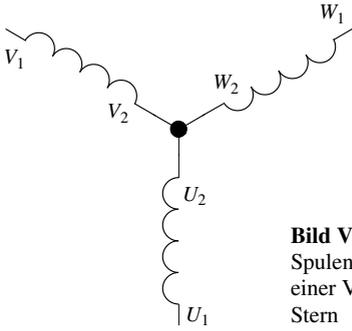


Bild VII-4
Spulenordnung bei einer Verkettung im Stern

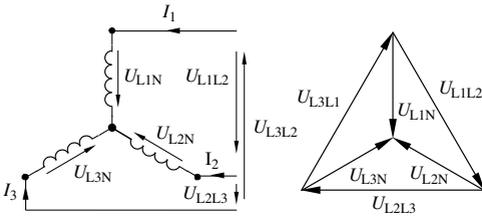


Bild VII-5 Sternschaltung mit Zeigerbild der Spannungen

Nach Bild VII-5 ergeben sich folgende mathematischen Zusammenhänge.

Strangspannung $U_{Str} = U_{1N} = U_{2N} = U_{3N}$ (VII.4)

Leiterspannung 1-2:

$$\underline{U}_{L1L2} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N} = U_{1N} \cdot e^{-j90} - U_{2N} \cdot e^{j150}$$

$$= U_{Str} \cdot (0,866 - j1,5) = 1,732 \cdot e^{-j60} \cdot U_{Str}$$

(VII.5)

Leiterspannung 2-3:

$$\underline{U}_{L2L3} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} = U_{2N} \cdot e^{j150} - U_{3N} \cdot e^{j30}$$

$$= U_{Str} \cdot (1,732 - j0) = 1,732 \cdot e^{-j180} \cdot U_{Str}$$

(VII.6)

Leiterspannung 3-1:

$$\underline{U}_{L3L1} = \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{1N} = U_{3N} \cdot e^{j30} - U_{1N} \cdot e^{-j90}$$

$$= U_{Str} \cdot (0,866 + j1,5) = 1,732 \cdot e^{+j60} \cdot U_{Str}$$

(VII.7)

Strangstrom

$$I_{Str} = I_{1N} = I_{2N} = I_{3N} = I_{L1} = I_{L2} = I_{L3}$$

(VII.8)

Die Leiterströme entsprechen in der symmetrischen Sternschaltung den Strangströmen, die Leiterspannungen einer symmetrischen Sternschaltung betragen das $1,732 = \sqrt{3}$ -fache der Strangspannungen.

Für einen symmetrischen Drehstromverbraucher in Sternschaltung gelten gleiche Bedingungen.

2.2 Dreieckschaltung

Eine Dreiecksschaltung erhält man, wenn die drei Generatorspulen in Reihe geschaltet werden (Bild VII-6). Die in den Spulen induzierte Spannung ist die

zwischen den Abgangsklemmen des Generators gemessene Spannung.

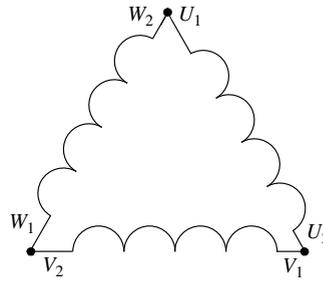


Bild VII-6 Spulenordnung bei einer Verkettung im Dreieck

Ein Zusammenhang zwischen den Strangwerten und den Leiterwerten des symmetrischen Drehstromsystems in Dreieckschaltung ist im Bild VII-7 dargestellt.

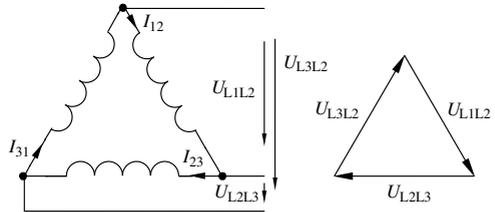


Bild VII-7 Dreieckschaltung mit Zeigerbild der Spannungen

Nach Bild VII-7 ergeben sich folgende mathematischen Zusammenhänge:

Strangstrom $I_{Str} = I_{12} = I_{23} = I_{31}$ (VII.9)

Leiterstrom 1:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = I_{12} \cdot e^{-j60} - I_{31} \cdot e^{j60}$$

$$= I_{Str} \cdot (0 - j1,732) = 1,732 \cdot e^{-j90} \cdot I_{Str}$$

(VII.10)

Leiterstrom 2:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = I_{23} \cdot e^{-j90} - I_{12} \cdot e^{-j60}$$

$$= I_{Str} \cdot (-1,5 + j0,866) = 1,732 \cdot e^{j150} \cdot I_{Str}$$

(VII.11)

Leiterstrom 3:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = I_{31} \cdot e^{j60} - I_{23} \cdot e^{j180}$$

$$= I_{Str} \cdot (1,5 + j0,866) = 1,732 \cdot e^{j30} \cdot I_{Str}$$

(VII.12)

Strangspannung $U_{Str} = U_{12} = U_{23} = U_{31}$ (VII.13)

Die Leiterspannungen entsprechen in der symmetrischen Dreieckschaltung den Strangspannungen; die Leiterströme einer symmetrischen Dreieckschaltung betragen das $1,732 = \sqrt{3}$ -fache der Strangströme.

Für einen symmetrischen Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung gelten gleiche Bedingungen.

3 Leistung des Dreiphasenstroms

In symmetrisch belasteten Dreiphasensystemen sind die Werte für U , I und φ für die drei Stromkreise (Phasen) gleich. Die Leistung in jedem Strang ist somit identisch und kann nach den Gleichungen (VI-156) bis (VI-161) berechnet werden.

$$\text{Strangscheinleistung } S_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \quad (\text{VII.14})$$

$$\text{Strangwirkleistung } P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \cos \varphi \quad (\text{VII.15})$$

$$\text{Strangblindleistung } Q_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \sin \varphi \quad (\text{VII.16})$$

Die Gesamtleistung des Dreiphasensystems ist die Summe der Strangleistungen.

$$\text{Scheinleistung } S = 3 \cdot S_{\text{Str}} \quad (\text{VII.17})$$

$$\text{Wirkleistung } P = 3 \cdot P_{\text{Str}} \quad (\text{VII.18})$$

$$\text{Blindleistung } Q = 3 \cdot Q_{\text{Str}} \quad (\text{VII.19})$$

Berechnung der Leistung über die Leiterspannung und den Leiterstrom:

Sternschaltung

$$S = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = 3 \cdot \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \quad (\text{VII.20})$$

Dreieckschaltung:

$$S = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = 3 \cdot U_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \quad (\text{VII.21})$$

Aus der Übereinstimmung der beiden Gleichungen ergibt sich, daß die Leistung eines Dreiphasensystems unabhängig davon berechnet wird, ob eine Stern- oder Dreieckschaltung vorliegt.

Die Wirk- und Blindleistungen im Dreiphasensystem bei symmetrischer Belastung werden entsprechend berechnet.

Aus Gründen der Vereinfachung werden bei Berechnungen die Leiterwerte des Dreiphasensystems ohne Indizes geschrieben.

■ **Beispiel:** Ein symmetrischer Drehstromverbraucher ist im Stern geschaltet. Bekannt sind $U = 100 \text{ V}$ und $R = 100 \Omega$.

Wie groß sind die Strangströme und die Strangspannungen und welche Phasenlage haben sie? Welchen Wert hat die Scheinleistung?

$$U_{\text{Str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V}; \quad I = \frac{U_{\text{Str}}}{R} = \frac{57,7 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A}$$

Mit den Vorgaben im symmetrischen Drehstromnetz folgt für die Ströme und Spannungen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= 0,577 \text{ A } e^{-j90}; & \underline{U}_{1N} &= 57,7 \text{ V } e^{-j90}; \\ \underline{I}_2 &= 0,577 \text{ A } e^{j150}; & \underline{U}_{2N} &= 57,7 \text{ V } e^{j150}; \\ \underline{I}_3 &= 0,577 \text{ A } e^{j60}; & \underline{U}_{3N} &= 57,7 \text{ V } e^{j60}; \end{aligned}$$

Scheinleistung:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ V} \cdot 0,577 \text{ A} = 100 \text{ VA}$$

oder in der komplexen Form

$$\begin{aligned} \underline{S} &= 3 \cdot (\underline{U}_{\text{Str}} \cdot \underline{I}_{\text{Str}}^*) = 3 \cdot 57,7 \text{ V} \cdot 0,577 \text{ A} \cdot e^{j((-90)-(-90))} \\ &= 100 \text{ VA} \cdot e^{j0} \end{aligned}$$

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein symmetrischer Verbraucher mit induktiver Last in Dreieckschaltung mit folgenden Werten: $U = 100 \text{ V}$; $Z = 300 \Omega e^{j20}$. Welchen Wert und Phasenlage haben die Ströme in den Zuleitungen? Welchen Wert hat die Scheinleistung?

Strangströme:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{L12}}{Z_{12}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{-j60}}{300 \Omega \cdot e^{j20}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{-j80} = (0,057 - j0,325) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{L23}}{Z_{23}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j180}}{300 \Omega \cdot e^{j20}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{j160} = (-0,31 + j0,113) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{L31}}{Z_{31}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j60}}{300 \Omega \cdot e^{j20}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{j40} = (0,25 + j0,212) \text{ A}$$

Ströme in der Zuleitung:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 0,057 \text{ A} - j0,325 \text{ A} - (0,25 \text{ A} + j0,212 \text{ A}) = \\ &= -0,193 \text{ A} - j0,537 \text{ A} = 0,57 \text{ A } e^{-j110} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -0,31 \text{ A} + j0,113 \text{ A} - (0,057 \text{ A} - j0,325 \text{ A}) = \\ &= -0,367 \text{ A} + j0,438 \text{ A} = 0,57 \text{ A } e^{j130} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 0,25 \text{ A} + j0,212 \text{ A} - (-0,31 \text{ A} + j0,113 \text{ A}) = \\ &= 0,56 \text{ A} + j0,1 \text{ A} = 0,57 \text{ A } e^{j10} \end{aligned}$$

Scheinleistung:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ V} \cdot 0,57 \text{ A} = 98,7 \text{ VA} \approx 100 \text{ VA}$$

4 Das unsymmetrische Dreiphasensystem

Nicht bei jedem Verbraucher oder bei jedem Belastungsfall kann gewährleistet werden, daß die Impedanzen der drei Stränge gleichen Wert oder gleiche Phasenlage haben. Tritt ein Ungleichgewicht im Dreiphasensystem auf, hat das Verschiebungen im Netz zur Folge. Damit diese Verschiebungen, besonders im Niederspannungsnetz, nicht zu große Auswirkungen auf die Phasenlage haben, wird das Netz, wenn ungleichmäßige Belastungen zu erwarten sind, nicht als Dreileiternetz, sondern als *Vierleiternetz* ausgeführt.

4.1 Das unsymmetrische Dreileiternetz

Im Dreiphasennetz sind die Leiterspannungen in Größe und Phasenlage vorgegeben. Treten am Verbraucher Unsymmetrien auf, so verschieben sich die Ströme in den Zuleitungen, ergeben als Summe aber immer noch Null!

Beim Verbraucher in der Sternschaltung nehmen die Strangspannungen einen anderen Winkel und eine andere Größe ein.

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Stern geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten: $U = 100 \text{ V}$; $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$; $R_3 = 100 \Omega$.

Für die Berechnung muß eine Stern-Dreieck-Umwandlung durchgeführt werden.

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_2}$$

Mit Hilfe der Umwandlung können die Dreieckswiderstände bestimmt werden, die den gleichen Leiterstrom erzeugen, wie die Strangwiderstände der Sternschaltung.

$$R_{12} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{100 \Omega} = 200 \Omega$$

$$R_{23} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{100 \Omega} = 200 \Omega$$

$$R_{31} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{50 \Omega} = 400 \Omega$$

Nun können die Ströme in der Dreieckschaltung berechnet werden.

$$I_{12} = \frac{U_{L112}}{R_{12}} = \frac{100 \text{ V } e^{-j60}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,5 \text{ A } e^{-j60} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{U_{L213}}{R_{23}} = \frac{100 \text{ V } e^{j180}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,5 \text{ A } e^{j180} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{L311}}{R_{31}} = \frac{100 \text{ V } e^{j60}}{400 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,25 \text{ A } e^{j60} = +0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}$$

Ströme in der Zuleitung:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A} - (0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}) = 0,125 \text{ A} + j0,649 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j79}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A} - (0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}) = -0,75 \text{ A} - j0,433 \text{ A} = 0,866 \text{ A } e^{j150}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A} - (-0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}) = 0,625 \text{ A} + j0,216 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j19}$$

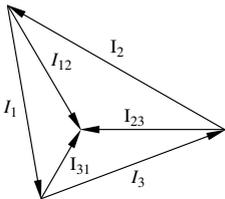


Bild VII-8
Zeigerdiagramm der Ströme gemäß Beispiel

Sind die Ströme in den Zuleitungen bekannt, können die Spannungen an den Widerständen der Sternschaltung berechnet werden.

$$U_{L1N} = I_1 \cdot R_1 = 0,66 \text{ A} \cdot e^{j79} \cdot 100 \Omega = 66 \text{ V} \cdot e^{j79}$$

$$U_{L2N} = I_2 \cdot R_2 = 0,866 \text{ A} \cdot e^{-j150} \cdot 50 \Omega = 43,3 \text{ V} \cdot e^{-j150}$$

$$U_{L3N} = I_3 \cdot R_3 = 0,66 \text{ A} \cdot e^{j19} \cdot 100 \Omega = 66 \text{ V} \cdot e^{j19}$$

Die Strangspannungen haben bei einer unsymmetrischen Belastung also nicht mehr den Wert $U_{\text{Str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V}$, den sie bei einer symmetrischen Belastung aufweisen. Der Sternpunkt verschiebt sich um einen Wert U_0 aus der Ursprungslage.

Scheinleistung:

$$S_{\text{ges}} = S_1 + S_2 + S_3 = U_{L1N} \cdot I_1 + U_{L2N} \cdot I_2 + U_{L3N} \cdot I_3$$

$$= 66 \text{ V} \cdot 0,66 \text{ A} + 43,3 \text{ V} \cdot 0,866 \text{ A} + 66 \text{ V} \cdot 0,66 \text{ A}$$

$$= 43,56 \text{ VA} + 37,5 \text{ VA} + 43,56 \text{ VA} = 124,62 \text{ VA}$$

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Dreieck geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten: $U = 100 \text{ V}$; $R_{12} = 200 \Omega$; $R_{23} = 200 \Omega$; $R_{31} = 400 \Omega$.

Ströme in der Dreieckschaltung:

$$I_{12} = \frac{U_{L112}}{R_{12}} = \frac{100 \text{ V } e^{-j60}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,5 \text{ A } e^{-j60} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{U_{L213}}{R_{23}} = \frac{100 \text{ V } e^{j180}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,5 \text{ A } e^{j180} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{L311}}{R_{31}} = \frac{100 \text{ V } e^{j60}}{400 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0,25 \text{ A } e^{j60} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}$$

Ströme in der Zuleitung:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A} - (0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}) = 0,125 \text{ A} + j0,649 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j79}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A} - (0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}) = -0,75 \text{ A} - j0,433 \text{ A} = 0,866 \text{ A } e^{j150}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A} - (-0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}) = 0,625 \text{ A} + j0,216 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j19}$$

Scheinleistung:

$$S_{\text{ges}} = S_1 + S_2 + S_3 = U_{L112} \cdot I_{12} + U_{L213} \cdot I_{23} + U_{L311} \cdot I_{31}$$

$$= 100 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} + 100 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} + 100 \text{ V} \cdot 0,25 \text{ A} = 50 \text{ VA} + 50 \text{ VA} + 25 \text{ VA} = 125 \text{ VA}$$

4.2 Das unsymmetrische Vierleiternetz

Muß in einem Dreiphasensystem mit starken Unsymmetrien gerechnet werden, wird das Vierleiternetz eingesetzt. Beim Vierleiternetz ist der Sternpunkt des Verbrauchers mit dem Sternpunkt der Spannungsquelle über einen separaten Leiter (Neutralleiter) verbunden (Bild VII-9). Treten am Verbraucher ungleiche Belastungen in den verschiedenen Phasen auf, wird der Differenzstrom des Systems über den Neutralleiter zur Spannungsquelle zurückgeleitet.

$$\text{Neutralleiterstrom } I_N = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{VII.22})$$

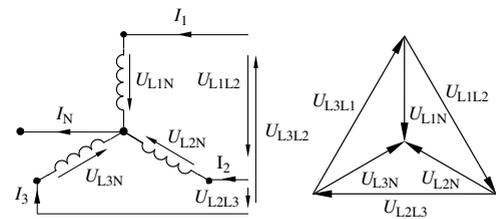


Bild VII-9 Sternschaltung mit Zeigerbild der Spannungen im Vierleiternetz

Ist der Widerstand des Neutralleiters sehr klein gegenüber dem Widerstand des Verbrauchers, verschiebt sich beim Vierleiternetz die Sternpunktspannung nicht; die Strangspannungen bleiben in Phasenlage und Größe erhalten.

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Stern geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten: $U = 100 \text{ V}$; $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$; $R_3 = 100 \Omega$. Unter der Voraussetzung, daß der Widerstand des Neutralleiters gegen Null geht, folgt:

$$U_{\text{Str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V} ;$$

Strangströme:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{-j90}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{-j90}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{j150}}{50 \Omega} = 1,154 \text{ A} \cdot e^{j150}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{j30}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{j30}$$

Der über den Neutralleiter abfließende Strom ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,577 \text{ A} \cdot e^{-j90} + 1,154 \text{ A} \cdot e^{j150} + 0,577 \text{ A} \cdot e^{j30} \\ &= (0 - j0,577) \text{ A} + (-1,0 + j0,577) \text{ A} + (0,5 + j0,289) \text{ A} = \\ &= (-0,5 + j0,289) \text{ A} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{j150} \end{aligned}$$

Literaturhinweise

- [1] *Hagmann, G.*: Grundlagen der Elektrotechnik: Aula-Verlag, 2006
- [2] *Hering, E.; Martin, R.; Stohrer, M.*: Physik für Ingenieure: Springer, 2002
- [3] *Frohne, H.*: Moeller Grundlagen der Elektrotechnik: Teubner, 2005
- [4] *Zastrow, D.*: Elektrotechnik: Vieweg, 2006
- [5] *Lindner, H.*: Physik für Ingenieure: Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2006