Sommerkurs Mathematik im Eigenstudium

Emrah Öztürk, Klaus Rheinberger

29. März 2024, FH Vorarlberg

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skriptum dient zur Vorbereitung auf den Mathematikunterricht an der Fachhochschule Vorarlberg. Die Theorieabschnitte, die kurz gehalten sind, umfassen die wichtigsten Konzepte und sollen im Detail gelesen werden. Für zusätzliche Informationen werden die unten angeführten Quellen empfohlen.

Zu jedem Abschnitt gibt es Übungsaufgaben mit Lösungen, die ebenfalls sehr kurz gehalten sind. Aufgaben, die mit (*) gekennzeichnet sind, haben einen hohen Schwierigkeitsgrad und können beim ersten Durcharbeiten ausgelassen werden. Mindestens 50 % der Aufgaben sollten selbständig gelöst werden können, um gut für das Studium vorbereitet zu sein.

Die folgenden Quellen wurden bei der Erstellung des Skripts verwendet:

- Papula, Lothar. "Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1."
- Heuser, Harro. "Lehrbuch der Analysis Teil 1."
- https://mathe.technikum-wien.at/

Des Weiteren empfehlen wir die folgenden Quellen:

- Walz, Guido; Zeilfelder, Frank; Rießinger, Thomas. "Brückenkurs Mathematik: Für Studieneinsteiger Aller Disziplinen."
- https://www.youtube.com/c/khanacademy (Englisch)
- https://www.youtube.com/c/MathebyDanielJung
- https://www.youtube.com/c/JoernLoviscach
- https://www.youtube.com/c/WeitzHAWHamburg

Für alle, die sich für die Geschichte der Mathematik interessieren und mehr über die Menschen erfahren wollen, die die Mathematik entscheidend vorangebracht haben, empfehlen wir die Seite https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ (Englisch).

1 Mengen

1.1 Theorie

Im folgenden werden Mengen, Mengenoperationen und oft verwendete mathematische Notationen beschrieben. Eine Menge ist eine Zusammenstellung verschiedener Elemente, z. B. ist $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Zahlen 1, 2 und 3. In einer Menge kommt es auf die Reihenfolge der Elemente nicht an, z. B. ist die Menge $\{1, 2, 3\}$ gleich der Menge $\{2,3,1\}$. Jedes Element einer Menge ist einzigartig, daher ist z. B. $\{1, 2, 2, 3\}$ keine Menge. Um anzugeben, dass ein Element x in einer Menge A enthalten ist, schreiben wir $x \in A$. Mengen können in aufzählender oder beschreibender Darstellung angegeben werden, z. B. ist die Menge $\{3, 4, 5, 6\}$ gleich der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 6\}$.

Wir verwenden das Symbol $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, das Symbol $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, das Symbol $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ und das Symbol $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen.

Seien A und B zwei Mengen. Die Vereinigung dieser Mengen ist die Menge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}, \tag{1}$$

wobei $x \in A \vee x \in B$ bedeutet, dass x in A oder in B enthalten ist. Das Symbol $:=$ bedeutet *ist definiert als*. Das Symbol $\vee$ ist das logische *oder*, und das Symbol $\wedge$ ist das logische *und*. Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \tag{2}$$

wobei $x \in A \wedge x \in B$ also bedeutet, dass x in A und in B enthalten ist. Das Komplement der Menge A in der Menge B ist die Menge

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \tag{3}$$

Sie wird auch Differenzmenge (A ohne B) genannt. Wir schreiben $A \subseteq B$ für A ist eine Teilmenge von B. Hierbei ist die Gleichheit der Mengen A und B erlaubt. Wenn wir die Gleichheit der Mengen ausschließen, schreiben wir $A \subset B$, also A ist echte Teilmenge von B. In Abbildung 1 werden die gerade beschriebenen Mengenoperationen in Form von Venn-Diagrammen dargestellt.

Für eine Menge A geben wir mit $|A|$ die Mächtigkeit oder Kardinalität der Menge an. Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl der Elemente in der Menge z. B. $|\{4,1,10\}| = 3$. Die leere Menge wird mit $\{\ \}$ beschrieben, sie enthält kein Element.

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}, \tag{4}$$

wobei (x, y) ein sogenanntes Tupel ist. Tupel haben die Eigenschaft, dass die Reihenfolge berücksichtigt wird und Elemente mehrfach vorkommen können z. B. gilt $(1, 2) \neq (2,1)$, und $(2, 2)$ ist ein Tupel. Tupel werden z. B. verwendet, um Koordinaten (x, y) in der Ebene oder (x, y, z) im Raum anzugeben.

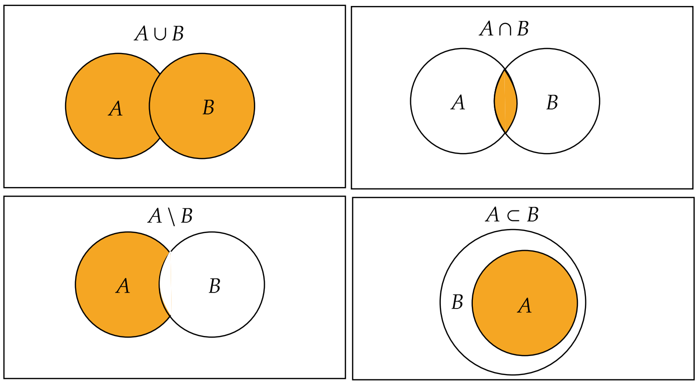

Abbildung 1: Venn-Diagramme, links oben: Vereinigung von A und B, links unten: Differenzmenge (A ohne B), rechts oben: Durchschnitt von A und B, rechts unten: A ist echte Teilmenge von B

Manchmal wollen wir ausdrücken, dass eine Menge ein Element mit einer gewissen Eigenschaft hat. Dies wird durch den Existenzquantor $\exists$ (es gibt) abgekürzt. Z. B. stimmt die Aussage

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \mid \text{p ist eine gerade Primzahl,} \tag{5}$$

da 2 in $\mathbb{N}$ enthalten ist. Auch ist es wünschenswert allen Elementen einer Menge eine Eigenschaft zuzuordnen. Dies ist durch den für-alle-Quantor $\forall$ möglich, z. B. bedeutet

$$\text{x ist gerade } \forall\, x \in A \tag{6}$$

dass alle Elemente der Menge A gerade sind.

Wir verwenden folgende Kurzschreibweisen für Intervalle: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Die Tabelle 1 fasst die wichtigsten Notationen zusammen.

$:=$	ist definiert als	$\exists$	es existiert ein
$\in$	ist Element von	$\forall$	für alle
$\mid$	für die gilt	$\vee$	oder
$\cup$	Vereinigungsmenge	$\wedge$	und
$\cap$	Durchschnittsmenge	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\setminus$	Differenzmenge	$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\subset$	ist echte Teilmenge von	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\subseteq$	ist Teilmenge von	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Tabelle 1: Zusammenfassung der wichtigsten Notationen

1.2 Aufgaben

1. Gegeben sind die Mengen $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ und $B = \{1, 6, 7, 8, 9\}$. Berechnen Sie
   a) die Vereinigungsmenge
   b) die Schnittmenge
   c) die Differenzmenge $A \setminus B$

2. Welche Zahlen sind in der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$ enthalten. Hinweis: Für das Lösen quadratischer Gleichungen siehe Abschnitt 4.

3. Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.
   a) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 4\}$
   b) $\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 4\}$
   c) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}$
   d) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$
   e) $\{1{,}2\} \times \{5{,}6\}$
   f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x = 2\}$
   g) $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 4\}$

4. Beschreiben Sie die Menge aller reellen Zahlen, deren Abstand zum Nullpunkt auf der Zahlengerade höchstens 3 Einheiten beträgt.

5. Die Potenzmenge $\mathcal{P}$ einer Menge M ist definiert als die Menge aller Teilmengen dieser Menge. Geben Sie die Potenzmenge der Menge $M = \{4, 5, 6\}$ an. Beachten Sie, dass die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist. Wie groß ist die Mächtigkeit (Kardinalität) dieser Menge?

6. Geben Sie die Mächtigkeit (Kardinalität) der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 10\}$ an.

7. Geben Sie die durch die Ungleichung $3n - 15 \leq 4$ definierte Teilmenge von $\mathbb{N}$ in aufzählender und in beschreibender Form an.

8. Zeichnen Sie die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in einem Venn-Diagramm (ähnlich zu Abbildung 1).

9. (*) Wir sagen x ist in einer Epsilon-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ von x_0, wenn der Abstand $d(x, x_0)$ zwischen x und x_0 echt kleiner ϵ ist. Beschreiben und zeichnen Sie die Menge $U_\epsilon(x_0)$ mit $\epsilon = 1$ und $x_0 = (1, 1)^T$. Verwenden Sie als Abstand $d(x, x_0) := \sqrt{\langle x - x_0, x - x_0 \rangle}$.

   Hinweis: Der Ausdruck $\langle x,y \rangle$ wird als Skalarprodukt oder inneres Produkt bezeichnet. Für detaillierte Informationen siehe Abschnitt 6.

1.3 Lösungen

1. a) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   b) $\{6, 7\}$
   c) $\{3, 4, 5\}$
2. $\{2\}$
3. a) $\{2, 4, 8, 16\}$
   b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$
   c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   d) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   e) $\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$
   f) $\{-2, \frac{1}{2}\}$
   g) $\{1, 2, 3, 4\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} |\ |x| \leq 3\}$ oder $[-3, 3]$
5. $\mathcal{P} = \{\{\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$, $|\mathcal{P}| = 2^3 = 8$
6. $|\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 10\}| = 9$
7. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$
8. Siehe Abbildung 2.

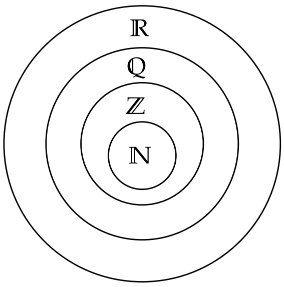

Abbildung 2: Venn-Diagramme der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

9. $U_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$, wobei $\epsilon = 1$, $x_0 = (1, 1)^\top$ und $d(x, x_0) = \sqrt{\langle x - x_0, x - x_0 \rangle}$ ist. Siehe Abbildung 3.

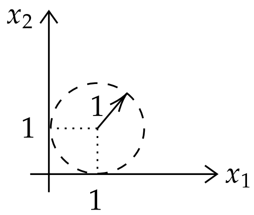

Abbildung 3: Epsilon-Umgebung

2 Rechnen mit reellen Zahlen und Variablen

2.1 Theorie

Dieser Abschnitt behandelt das Rechnen mit reellen Zahlen sowie häufig verwendete Umformungstechniken. Die folgenden Rechenregeln werden für das Rechnen mit Brüchen verwendet. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, c, d \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{7a}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{7b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{bd} \tag{7c}$$

Die folgenden Regeln und Notationen gelten für das Rechnen mit Potenzen. Sei $n, m \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$x^n x^m = \underbrace{x \cdots x}_{\text{n mal}} \underbrace{x \cdots x}_{\text{m mal}} = x^{n+m} \tag{8a}$$

$$(xy)^n = \underbrace{xy \cdots xy}_{\text{n mal}} = \underbrace{x \cdots x}_{\text{n mal}} \underbrace{y \cdots y}_{\text{n mal}} = x^n y^n \tag{8b}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{x \cdots x}_{\text{n mal}} \cdots \underbrace{x \cdots x}_{\text{n mal}}}_{\text{m mal}} = x^{nm} \tag{8c}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \tag{8d}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \tag{8e}$$

Für jede reelle Zahl x ist $x^0 := 1$ definiert. Die (Quadrat)Wurzel einer nicht-negativen Zahl $x \geq 0$ ist eindeutig definiert als jene nicht-negative Zahl $\sqrt{x} \geq 0$, die quadriert wieder x ergibt: $(\sqrt{x})^2 = x$. Der Betrag einer Zahl x ist definiert durch:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x, & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Es gilt auch $|x| = \sqrt{x^2}$. Für das Rechnen mit dem Betrag gelten die folgenden Rechenregeln:

$$|x| \geq 0, |x| = 0 \implies x = 0 \qquad \text{positiv definit} \tag{10a}$$
$$|ax| = |a||x| \qquad \text{absolut homogen} \tag{10b}$$
$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{Dreiecksungleichung} \tag{10c}$$

Der Implikationspfeil $\implies$ gibt an, dass aus der linken Bedingung $|x| = 0$ die rechte Bedingung $x = 0$ folgt, die linke also die rechte impliziert.

Die binomischen Formeln lauten:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{erste binomische Formel} \tag{11a}$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad \text{zweite binomische Formel} \tag{11b}$$
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \qquad \text{dritte binomische Formel} \tag{11c}$$

Häufig wird der Logarithmus einer Zahl x zu einer bestimmten Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ gesucht. Der Logarithmus $y = \log_b(x)$ ist diejenige Zahl y, die die Bedingung $b^y = x$ erfüllt. Es wir also nach der Hochzahl gesucht. Beim Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln:

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \tag{12a}$$
$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y) \tag{12b}$$
$$\log_b(x^n) = n \log_b(x) \tag{12c}$$

Der Logarithmus zur Basis e erhält eine besondere Bezeichnung $\log_e(x) := \ln(x)$ und heißt natürlicher Logarithmus.

Wir verwenden die Kurzschreibweise $\sum_{i=1}^{n} a_i$, um die Summe über mehrere Summanden a_i auszudrücken:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{13}$$

Für das Produkt über mehrere Faktoren a_i wird analog

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \tag{14}$$

verwendet. Zum Beispiel ist $\sum_{i=1}^{10} i = 55$ und $\prod_{i=1}^{3} i = 6$.

In vielen Fällen möchte man Angaben in Prozent machen, z. B. 80 % der eingeschriebenen Schüler sind im Klassenraum anwesend. Prozentangaben beziehen sich auf einen Grundwert. In unserem Beispiel sind das die 20 Schüler, die in der Klasse eingeschrieben sind. Wenn bekannt ist, dass 16 dieser Schüler in der Klasse anwesend sind, kann ihr Anteil am Grundwert mit $\frac{16}{20} = 0{,}8$ berechnet und wie folgt als Prozentwert angegeben werden:

$$0{,}8 = \frac{80}{100} = 80\frac{1}{100} = 80\,\%. \tag{15}$$

Das Symbol % ist also eine Kurzschreibweise für $\frac{1}{100}$. Umgekehrt können durch Multiplikation des Grundwerts mit 0,8 die 80 % des Grundwerts 20 berechnet werden:

$$20 \cdot 0{,}8 = 16. \tag{16}$$

2.2 Aufgaben

1. Welches n wird gesucht, wenn n die Gleichung $(-2)^n = -\frac{1}{32}$ erfüllt?

2. Berechnen Sie x, sodass die Gleichung $\log_3(x) = 5$ erfüllt ist.

3. Was ist der Logarithmus von 1 zu einer beliebigen Basis $b > 0$ und $b \neq 1$: $\log_b(1) =?$ Erklären Sie Ihre Lösung im Detail.

4. Berechnen Sie $\log_b(b)$. Erklären Sie Ihre Lösung im Detail.

5. (*) Logarithmen wurden ursprünglich eingeführt, um lange Multiplikationen durch einfachere Additionen zu ersetzen. In der Astronomie waren lange Multiplikationen zu einer Zeit, als es noch keine Computer gab, eine zeitraubende und sehr fehleranfällige Angelegenheit. Um den Vorteil von Logarithmen zu verdeutlichen, multiplizieren Sie einerseits die Zahlen 2,67 und 3,51 in schriftlicher Form, und runden Sie auf zwei Nachkommastellen. Sie lesen andererseits aus einer Logarithmentafel $1{,}001^{983} = 2{,}67$, $1{,}001^{1256} = 3{,}51$ und $1{,}001^{2239} = 9{,}37$. Berechnen Sie Anhand dieser Informationen und der Regel (12a) $2{,}67 \cdot 3{,}51$, ohne die Multiplikation durchzuführen.

6. Sie wissen, dass ein Produkt genau 25 kg wiegt. Um Ihre neue Waage zu testen, wiegen Sie das Produkt und stellen fest, dass 23 kg angezeigt werden. Geben Sie den Fehler der Waage in Prozent an. Nehmen Sie nun an, dass Sie einen anderen Gegenstand wiegen, von dem Sie wissen, dass es 80 kg wiegt. Welches Gewicht wird auf der Waage angezeigt, wenn dieser Gegenstand gewogen wird?

7. Eine 1200 EUR teure Ware wird zuerst um 10 % billiger, dann nochmals um 15 % des letzten Preises. Würde sich eine Änderung ergeben, wenn die Reihenfolge der Verbilligungen umgekehrt wären? Warum kann man nicht gleich 25 % abziehen?

8. Ein Waldbestand wird auf 12000 m^3 geschätzt. Das jährliche Wachstum wird mit 2,8 % angenommen. Berechnen Sie, wie viel m^3 Holz jährlich entnommen werden können, ohne dass der Waldbestand weniger wird.

9. Merken Sie sich eine Zahl zwischen 1 und 10. Multiplizieren Sie diese Zahl zuerst mit 2 und dann mit der Zahl 5. Dividieren Sie nun diese Zahl durch Ihre ursprünglich (eingeprägte) Zahl. Ziehen Sie nun die Zahl 7 von der Zahl ab. Wenn Sie keinen Fehler gemacht haben, ist die Lösung 3. Erklären Sie, warum dieser Trick funktioniert. Kann zu Beginn eine beliebige Zahl gewählt werden?

10. Ein Bienenzüchter hat 64 kg Honig. Er füllt damit 35 Becher zu $\frac{3}{7}$ kg und 25 Becher zu $\frac{2}{5}$ kg. Der Rest soll in Becher zu $\frac{3}{8}$kg abgefüllt und zum Einzelpreis von 5 EUR verkauft werden. Wie viele Becher zu $\frac{3}{8}$kg lassen sich füllen, und welchen Betrag erhält der Bienenzüchter dafür?

11. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Hinweis: Suchen Sie zuerst nach einer Formel.
    a) $\sum_{i=1}^{200} i$
    b) $\sum_{i=1}^{50} i^2$
    c) $\sum_{i=0}^{100} (\frac{1}{4})^i$

12. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, bis keine Klammern mehr vorhanden sind. Hinweis: Binomischen Formeln
    a) $(ac + bd)^2$
    b) $(a + b)(u + v)^2$
    c) $(a + 7)(a - 7)$
    d) $(r + 4)^3$

2.3 Lösungen

1. $n = -5$

2. $x = 3^5$

3. $y = \log_b(1)$ ist die Zahl y, sodass $b^y = 1$ für ein beliebiges b gilt. Es wurde $b^0 = 1$ für alle reellen Zahlen b definiert. Somit gilt $y = \log_b(1) = 0$.

4. $y = \log_b(b)$ gibt die Zahl y sodass $b^y = b$, also $y = 1$.

5. $2{,}67 \cdot 3{,}51 = 9{,}37$. Die Multiplikation ist äquivalent zu $\log_{1,001}(2{,}67 \cdot 3{,}51)$. Es gilt $\log_{1,001}(2{,}67 \cdot 3{,}51) = \log_{1,001}(2{,}67) + \log_{1,001}(3{,}51) = 983 + 1256 = 2239$. Anstatt einer Multiplikation addieren Sie also die Zahlen aus der Angabe. Hieraus lesen Sie wieder aus der Angabe die Lösung 9,37 ab.

6. Fehler: 8 %, Gewicht des Gegenstandes auf der Waage: 73.6kg

7. 918 EUR. Nein, wegen Änderung des jeweiligen Grundwerts.

8. 336 m^3

9. Sei x die von Ihnen ausgewählte Zahl zwischen 1 und 10. Es wird berechnet $\frac{x*2*5}{x} - 7 = 10 - 7 = 3$. Der Trick funktioniert nicht, wenn die Zahl $x = 0$ gewählt wird.

10. 104 Becher, 520 EUR

11. a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ und damit folgt $\sum_{i=1}^{200} i = \frac{200*201}{2} = 20100$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und damit folgt $\sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50*51*101}{6} = 42925$

c) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ mit $q \neq 1$ damit folgt $\sum_{i=0}^{100} (\frac{1}{4})^i = \frac{(\frac{1}{4})^{101}-1}{\frac{1}{4}-1} \approx 1 + \frac{1}{3}$

12. a) $a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2$

b) $au^2 + 2uva + av^2 + bu^2 + 2uvb + bv^2$

c) $a^2 - 49$

d) $r^3 + 12r^2 + 48r + 64$

3 Funktionen

3.1 Theorie

In diesem Abschnitt werden Funktionen und ihre Eigenschaften beschrieben. Funktionen dienen zur Beschreibung von Zusammenhängen und Abhängigkeiten zwischen zwei Größen. Die allgemeine Definition lautet: Eine Funktion f ist eine Abbildung von einer Definitionsmenge X in eine Bildmenge Y:

$$f : X \to Y, x \mapsto y = f(x) \tag{17}$$

Dabei wird jedem x der Definitionsmenge X ein eindeutig bestimmtes Element y der Bildmenge Y zuordnet. Die Größe y (abhängige Variable) hängt von der Größe x ab (unabhängige Variable), y ist eine Funktion von x.

- Wir sagen, dass eine Funktion injektiv ist, wenn die Funktion f zwei unterschiedlichen x-Elementen der Definitionsmenge zwei unterschiedliche y-Elemente der Bildmenge zuordnet.
- Eine Funktion f heißt surjektiv, wenn jedes y der Bildmenge die Zuordnung von mindestens einem x unter f ist.
- Eine Funktion f ist bijektiv, wenn die Funktion injektiv und surjektiv ist.

Diese Begriffe werden in der Abbildung 4 dargestellt. Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar (=invertierbar), wenn die Funktion bijektiv ist. Dann erfüllt die umgekehrte Zuordnung alle Bedingungen einer Funktion und wird Umkehrfunktion f^{-1} genannt. Für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y) \tag{18}$$

gilt $f^{-1}(f(x)) = x$. Zum Beispiel ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x + 5$ die Funktion $f^{-1}(x) = x - 5$, denn $f^{-1}(f(x)) = (x + 5) - 5 = x$.

Eine Funktion f heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)\ \forall x \in X$, und ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in X$ gilt. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = x^2$ gerade, denn $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Wir sagen eine Funktion f hat eine Nullstelle bei x, wenn $f(x) = 0$.

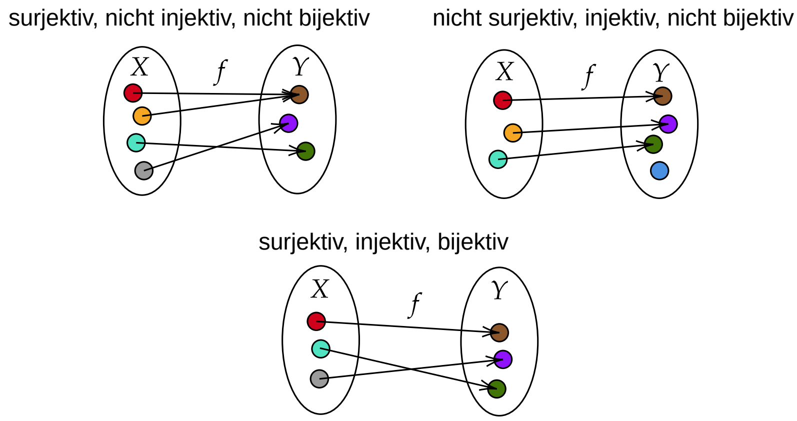

Abbildung 4: Links oben: Die Funktion f ist surjektiv aber nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv. Rechts oben: Die Funktion f ist injektiv aber nicht surjektiv und somit auch nicht bijektiv. Unten: Die Funktion f ist surjektiv, injektiv und somit auch bijektiv.

Gerade	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = kx + d$
Parabel	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$
Polynom	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
Exponentialfunktion	$f : \mathbb{R} \to (0,\infty), x \mapsto f(x) = a^x$, mit $a > 0$
Logarithmusfunktion	$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \log_b(x)$, mit $b > 0$ und $b \neq 1$
gebrochenrationale Funktion	$f : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

Tabelle 2: oft verwendete Funktionenklassen

Funktionen werden nach unterschiedlichen Kriterien eingeteilt. In Tabelle 2 führen wir oft verwendete Funktionenklassen an. Die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ in der Definition von gebrochenrationalen Funktionen sind Polynome, wobei die Definitionslücken x mit $h(x) = 0$ Polstellen genannt werden. Die Kurzschreibweise $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ steht für die Summe der $a_i x^i$, wobei i von 0 bis n geht. Es ist zu beachten, dass eine Gerade und eine Parabel spezielle Polynome sind.

Die Wertetabelle einer Funktion ist eine tabellarische Angabe von ausgewählten Funktionszuordnungen. Der Graph einer Funktion ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) in der Ebene, sodass $f(x) = y$ gilt. In Abbildung 5 sind zwei Graphen dargestellt.

Funktionen lassen sich addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und verketten

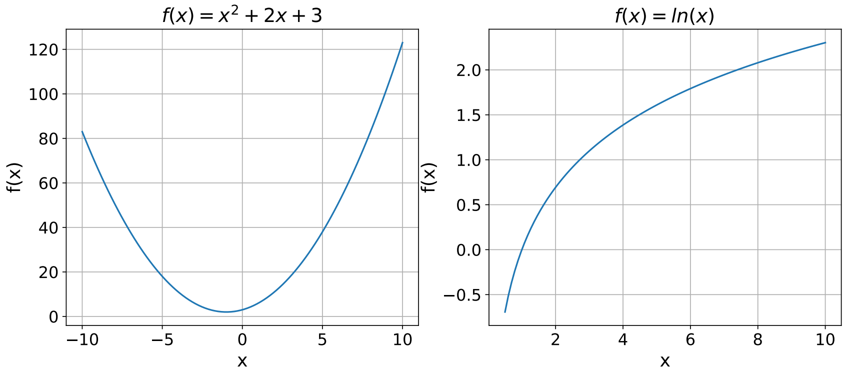

Abbildung 5: Links: Graph der quadratischen Funktion mit $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und $x \in [-10, 10]$, Rechts: Graph der logarithmischen Funktion mit Basis e und $x \in [0{,}5, 10]$

(hintereinander ausführen). Seien beispielsweise $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2 + 1$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sin(x) + x^2 + 1 \tag{19a}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sin(x) - x^2 - 1 \tag{19b}$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sin(x) \cdot (x^2 + 1) \tag{19c}$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} \tag{19d}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 1) \tag{19e}$$
$$\tag{19f}$$

3.2 Aufgaben

1. Welche der folgenden Diagramme in Abbildung 6 stellt eine Funktion dar und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

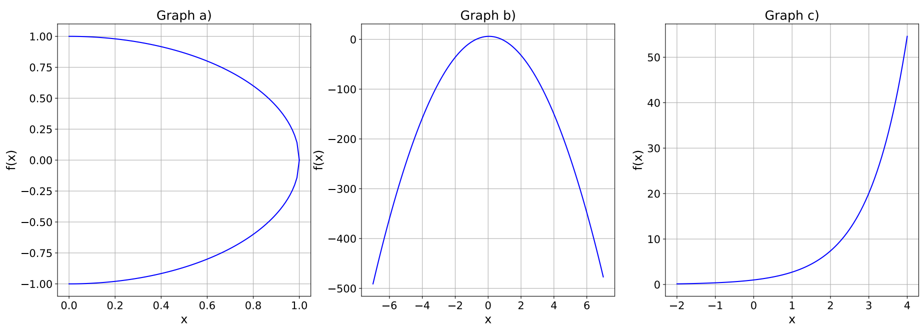

Abbildung 6: Links: Diagramm a), Mitte: Diagramm b) und Recht: Diagramm c)

2. Geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ und die kleinstmögliche Bildmenge $Y \subseteq \mathbb{R}$ für die folgenden Funktionen an.
   a) $f(x) = \sqrt{x-5}$
   b) $f(x) = \ln(x-2)$

3. Geben Sie an, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv sind oder keine dieser Eigenschaften besitzen.
   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x) = x^2$
   b) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \to f(x) = x^2$
   c) $f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \to f(x) = x^2$
   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x) = x^3$
   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x) = e^x$

4. Berechnen Sie die Nullstellen sowie die Polstellen der folgenden gebrochenrationalen Funktionen im Reellen, und geben Sie die Definitionsmengen an.
   a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$
   b) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

5. Eine gebrochenrationale Funktion f besitzt Nullstellen bei: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ und $x_3 = -4$ sowie Polstellen bei $x_4 = -1$ und $x_5 = 1$. Wie lautet eine mögliche Funktionsgleichung?

6. Der Weg s, den ein Körper im freien Fall zurücklegt, hängt von der Fallzeit t ab: $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ mit $g \approx 9{,}81\frac{m}{s^2}$. Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion für $t \in [0, 10]$, und beschreiben Sie den Graphen.

7. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2+5x+6$. Gibt es einen kleineren Bildbereich?

3.3 Lösungen

1. Diagramm b) und Diagramm c) sind Funktionen, Diagramm a) ist keine Funktion.

2. a) $X = [5, \infty), Y = [0,\infty)$
   b) $X = (2, \infty), Y = \mathbb{R}$

3. a) nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv
   b) nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv
   c) injektiv, surjektiv, bijektiv
   d) injektiv, surjektiv, bijektiv
   e) injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv

4. a) Polstelle: $x = 2$, Nullstellen: $x = 1$ und $x = -2$, $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   b) Polstelle: $x = -1$, Nullstelle: $x = 1$, $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
5. $f(x) = \frac{(x-2)(x+4)^2}{(x-1)(x+1)}$
6. Der Weg s ist quadratisch in t, siehe Abbildung 7.

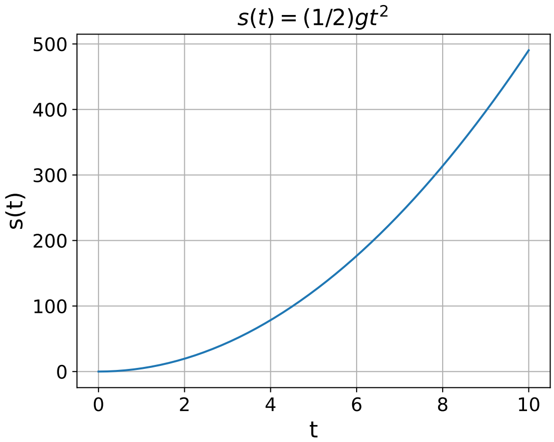

Abbildung 7: Fallgesetz

7. keine Nullstellen in $[0, \infty)$, $Y = [6, \infty)$

4 Lösen von Gleichungen

4.1 Theorie

In diesem Abschnitt wiederholen wir das Lösen ausgewählter Typen von Gleichungen. Eine lineare Gleichung kann durch elementare Umformungen wie folgt gelöst werden.

$$5x - 10 = 5 \iff 5x = 15 \iff x = 3 \tag{20}$$

Das Äquivalenzsymbol $\iff$ bedeutet, dass die linke Seite äquivalent zur rechten Seite ist. Jede Seite folgt aus der anderen, d. h. jede Seite impliziert die andere. Umformungen dieser Art sind wie das Hinzufügen oder Entfernen von Gewichten auf einer Waage. Wenn 10 auf einer Seite hinzugefügt wird (erste Umformung), muss 10 auch auf der anderen Seite hinzugefügt werden, um das Gleichgewicht zu erhalten, siehe Abblindung 8. Wir können die Lösung $x = 3$ überprüfen, indem wir sie in die Gleichung $5x - 10 = 5$ einsetzen, also $5 \cdot 3 - 10 = 5$.

Zur Lösung von quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ verwenden wir die p-q-Formel. Zunächst schreiben wir die Gleichung durch Division zu $x + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ um. Durch Setzen von $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ erhalten wir

$$x^2 + px + q = 0 \tag{21}$$

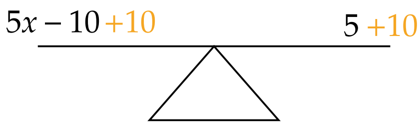

Abbildung 8: Gleichung als Waage

Gleichungen dieser Form lösen wir mit der p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{22}$$

Wir können die Lösungen wieder überprüfen, indem wir sie in die ursprüngliche Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ einsetzen. Eine quadratische Gleichung hat im Reellen entweder keine, eine oder zwei Lösungen.

Als nächstes betrachten wir Gleichungen mit Exponentialfunktionen. Zum Beispiel lösen wir mittels Äquivalenzumformungen die folgende Gleichung:

$$e^x = b \tag{23}$$

$$\ln(e^x) = \ln(b) \tag{24}$$

$$x = \ln(b) \tag{25}$$

Durch Einsetzen der Lösung $x = \ln(b)$ in $e^x = b$ erhält man $e^{\ln(b)} = b \iff b = b$ und damit die Korrektheit der berechneten Lösung.

Nun betrachten wir Gleichungen, die Wurzelausdrücke enthalten, zum Beispiel:

$$\sqrt{3 - 4x} = 4 \tag{26}$$

Wir quadrieren die Gleichung, was im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung darstellt. Vielmehr handelt es sich um eine Implikation, deren Umkehrung im Allgemeinen nicht stimmt:

$$\sqrt{3 - 4x} = 4 \implies 3 - 4x = 16 \tag{27}$$

Als nächstes folgen wieder Äquivalenzumformungen:

$$3 - 4x = 16 \iff -4x = 13 \iff x = -\frac{13}{4} \tag{28}$$

Aufgrund der Implikation ist es notwendig zu überprüfen, ob unser Lösungskandidat $x = -\frac{13}{4}$ tatsächlich die ursprüngliche Gleichung erfüllt. In diesem Beispiel ist dies der Fall, in nächsten nicht:

$$\sqrt{x} = -4 \implies x = 16. \tag{29}$$

Neben Gleichungen sind auch Ungleichungen oft wichtig. Zum Beispiel ist $x^2 \leq 16$ eine Ungleichung mit der Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 4\}$. Ungleichungen können wie Gleichungen umgeformt werden. Eine Einschränkung ist die folgende Regel

$$a \leq b \iff -a \geq -b. \tag{30}$$

Durch Multiplizieren mit einer negativen Zahl wird die Ungleichung also umgedreht.

Es kommt auch des öfteren vor, dass Variablen zu finden sind, sodass mehrere lineare Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \cdots a_{m,n}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{31}$$

Diese Art von Gleichungssystemen kann durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gelöst werden. Dabei werden die Gleichungen untereinander geschrieben und das System durch Äquivalenzumformungen in Trapezform gebracht. Folgende Umformungen sind erlaubt:

- Gleichungen mit reellen Zahlen ungleich Null multiplizieren
- das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen Gleichung addieren
- Gleichungen vertauschen

Im folgenden wird das Vorgehen an einem kurzen Beispiel aufgezeigt.

$$\begin{array}{rrl} x_1+ & x_2 = & 10 \\ 10x_1+ & 5x_2 = & 15| - 10 \cdot \mathrm{G1} \\ \hline x_1+ & x_2 = & 10 \\ & -5x_2 = & -85 \end{array}$$

Die Notation $-10\cdot$ G1 bedeutet: Ziehe das 10-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung ab. Nun entnehmen wir aus der zweiten Gleichung $-5x_2 = -85$ und folgern $x_2 = 17$. Durch Einsetzen von x_2 in die erste Gleichung $x_1 + x_2 = 10$ kann nun $x_1 = -7$ ermittelt werden. Geometrisch wird der Schnittpunkt der Geraden berechnet, was in Abbildung 9 dargestellt ist. Der Schnittpunkt zweier Geraden existiert nicht, wenn sie parallel verschoben sind. Schließlich können die zwei Gleichungen dieselbe Gerade beschrieben, sodass alle (unendlich vielen) Punkte der Geraden Schnittpunkte und somit Lösungen des Gleichungssystems sind. Diese Struktur (keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen) besteht auch bei allgemeinen Gleichungssystemen (31) mit n Variablen und m Gleichungen.

4.2 Aufgaben

1. Geben Sie die Gleichung der durch die Punkte $P_1 = (\frac{3}{2}; 2)$ und $P_2 = (-3; 3)$ verlaufenden Geraden an.
2. Stellen Sie die Gleichung der Geraden mit Steigung $k = -\frac{4}{3}$ durch den Punkt $P = (-2; -1/2)$ auf, und zeichnen Sie die Gerade.
3. Bestimmen Sie die reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen.

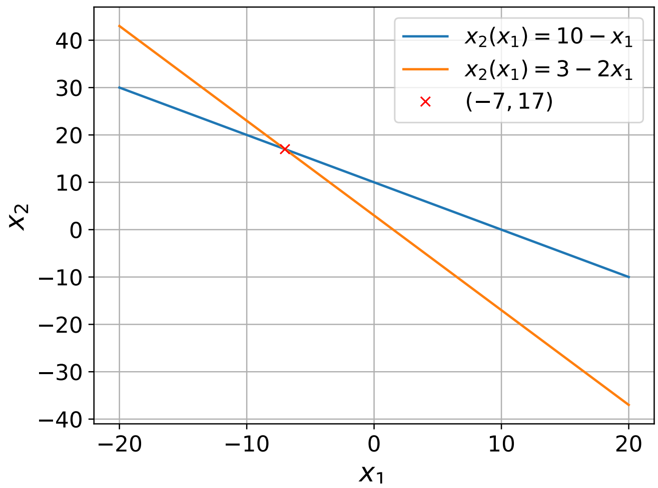

Abbildung 9: Geraden $x_1 + x_2 = 10$ und $10x_1 + 5x_2 = 15$ und ihr Schnittpunkt

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $(x-1)(x+3) = 4$

c) $-1 = -9(x-2)^2$

d) $4x^2 + 8x - 60 = 0$

4. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen im Reellen.

   a) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$

   b) $\sqrt{-3+2x} = 2$

   c) $\sqrt{x^2+6x+9} = 0$

5. Bestimmen Sie den Parameter c so, dass die Gleichung $2x^2 + 4x = c$ genau eine (doppelte) reelle Lösung besitzt.

6. (*) Welche reellen Lösungen besitzen die folgenden Gleichungen?

   a) $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$

   b) $x^5 - 3x^3 + x = 0$

   c) $x^3 - 6x^2 + 11x = 0$

7. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $e^{\cos(x)} = 1$.

8. (*) Gegeben sei die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass durch $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ und $z = m^2 + n^2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ ganzzahlige Lösungen der Gleichung gegeben sind.

9. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

10. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= -4 \end{aligned}$$

11. Auf dem Grabmal von Diophantos (250 n. Chr.): *Hier dies Grabmal deckt Diophantos sterbliche Hülle, und in des trefflichen Kunst zeigt es sein Alter dir an. Knabe zu sein gewährt ihm der Schöpfer ein Sechstel des Lebens, und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt. Noch ein Siebentel schwand, da fand er des Lebens Gefährtin, und fünf Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind. Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet, als ihn plötzlich der Tod seinem Ernährer entriss. Noch vier Jahre betrauert er ihn in schmerzlichem Kummer, und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht!*

12. Bhaskara (1114 n. Chr.): *Jemand hat* 300 *Rupien und* 6 *Pferde. Ein anderer hat* 10 *Pferde, aber eine Schuld von* 100 *Rupien. Beider Vermögen ist gleich groß. Wie viel Rupien kostet ein Pferd?*

13. Aus einem Papyrus Rhind (1700 v. Chr.): *Gib zu einer Zahl zwei Drittel ihrer selbst und nimm dann davon ein Drittel weg, so bleibt* 10. Berechnen Sie die Zahl!

14. In einem Rhombus ist die eine Diagonale um 10 cm länger als die andere. Vergrößert man die kürzere Diagonale um 2 cm und verkleinert die andere um 4cm, so bleibt der Flächeninhalt gleich. Wie lang sind die Diagonalen?

15. Verkürzt man jede Seite eines Quadrats um 10 %, so vermindert sich der Flächeninhalt um 400 cm^2. Welche Seitenlänge hat das ursprüngliche Quadrat?

16. Adam Riese (um 1500 n. Chr.): *Drei Gesellen kaufen ein Haus für* 204 *Gulden. Der erste gibt dreimal soviel wie der zweite, dieser viermal soviel wie der dritte.* Berechnen Sie, wie viel jeder bezahlt hat.

17. Verlängert man ein Quadrat in einer Richtung um 3 cm und in der anderen Richtung um 4 cm, so ist das entstehende Rechteck um 12 cm^2 größer als der doppelte Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats. Berechnen Sie die Längen beider Figuren!

18. Zwei ganze Zahlen haben die Summe 52. Subtrahiert man 8 von der ersten Zahl und addiert man 10 zur zweiten Zahl, so ist die Summe der neuen Zahl 54. Berechnen Sie die beiden Zahlen.

4.3 Lösungen

1. $f(x) = -\frac{2}{9}x + \frac{7}{3}$
2. $f(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{6}$, siehe Abbildung 10.

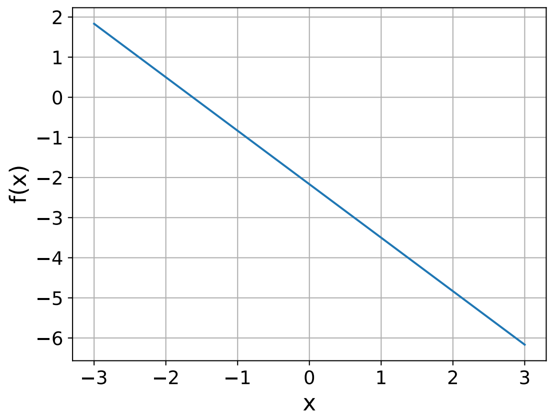

Abbildung 10: Gerade

3. a) $x = -2$
   b) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{8}$
   c) $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$
   d) $x_1 = 3, x_2 = -5$
4. a) keine Lösung
   b) $x = \frac{7}{2}$
   c) $x = -3$
5. $c = -2$
6. a) $t_{1,2} = \pm 2$, $t_{3,4} = \pm 3$
   b) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $x_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$
   c) $x_1 = 0$
7. $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
8. $2mn, m^2-n^2$ und $m^2+n^2 \in \mathbb{Z}$ und es gilt $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2 = m^4+2m^2n^2+n^4 = (m^2+n^2)^2$
9. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$

10. $x_1 = -1 + \frac{4}{3}t$, $x_2 = 2$, $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

11. 84

12. 100 Rupien

13. 9

14. $e = 16$, $f = 6$

15. 45,88

16. 144, 48, 12 Gulden

17. Quadrat mit Seitenlänge 7 cm; Rechteck mit Länge 11 cm und Breite 10 cm.

18. $y = 54 - t$, keine eindeutige Lösung.

5 Trigonometrie

5.1 Theorie

In diesem Abschnitt werden elementare Kenntnisse der Trigonometrie wiederholt. Die Funktionen Sinus, Cosinus und Tanges werden wie folgt in einem rechtwinkligen Dreieck definiert, siehe Abbildung 11.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{32a}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{32b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \tag{32c}$$

Im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) ist die Hypotenuse 1 und somit ist die Gegenkathete gleich dem $\sin(\alpha)$ und die Ankathete gleich dem $\cos(\alpha)$. Damit ist $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Ein Winkel kann zum Beispiel in Radiant (Einheitenzeichen: rad) oder in Grad (Einheitenzeichen: °) angegeben werden. Radiant ist die Strecke im Einheitskreis, die vom Winkel ausgehend von der x-Achse gegen den Uhrzeigersinn zurückgelegt wird. Der Umfang eines Kreises mit Radius $r = 1$ ist gegeben durch $U_{\text{Kreis}} = 2\pi r = 2\pi$, was in Grad 360° entspricht. Damit können folgende Beziehungen zwischen einer Winkelangabe α_{Grad} in Grad und der zugehörigen in Radiant α_{Rad} hergeleitet werden:

$$\frac{2\pi}{360°} = \frac{\alpha_{\text{Rad}}}{\alpha_{\text{Grad}}} \tag{33a}$$

$$\alpha_{\text{Rad}} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha_{\text{Grad}} \tag{33b}$$

$$\alpha_{\text{Grad}} = \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha_{\text{Rad}} \tag{33c}$$

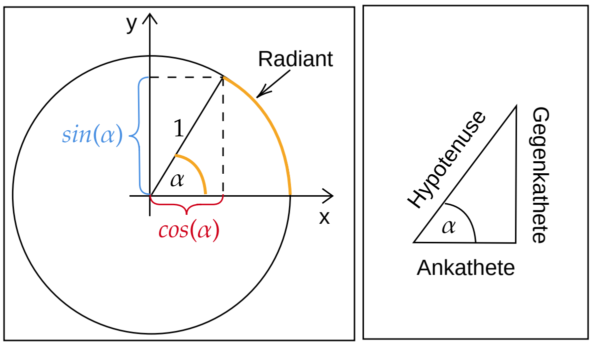

Abbildung 11: Links: Definition $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ im Einheitskreis mit Winkel α in Grad und Radiant, Rechts: rechtwinkliges Dreieck

Zum Beispiel sind $90°$ somit $\frac{\pi}{180°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras:

$$\text{Ankathete}^2 + \text{Gegenkathete}^2 = \text{Hypotenuse}^2 \tag{34}$$

Daraus kann im Einheitskreis die Beziehung $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ hergeleitet werden. In jedem Dreieck gilt, dass die Summe der Innenwinkel $180°$ ergibt.

5.2 Aufgaben

1. Rechnen Sie die in Grad gegebenen Werte in Radiant und die in Radiant gegebenen Werte in Grad um.
   a) $180°$
   b) $\frac{\pi}{4}$
   c) $270°$

2. Berechnen Sie die gesuchten Größen in den rechtwinkligen Dreiecken der Abbildung 12.

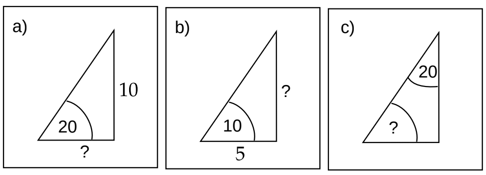

Abbildung 12: rechtwinklige Dreiecke

3. Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck in Abbildung 13 rechtwinklig ist und berechnen Sie anschließend den Winkel α.

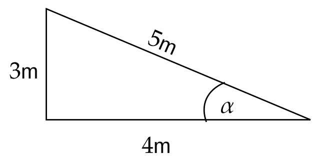

Abbildung 13: rechtwinkliges Dreieck

4. (*) Folgern Sie aus dem Satz des Pythagoras in Abbildung 14 den Höhensatz von Euklid $h = \sqrt{pq}$.

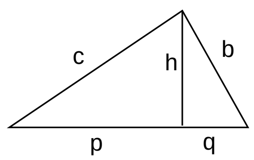

Abbildung 14: Höhensatz von Euklid

5. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$.

6. Wie lang ist der Schatten des 300 m hohen Eifelturms, wenn die Sonnenhöhe 30° beträgt? (Sonnenhöhe = Winkel, den die einfallenden Strahlen mit der Horizontalen bilden.)

7. Ein Riff wird von einem 130 m hohen Turm am Meeresrand unter dem Tiefenwinkel von 26° gesehen. Wie weit ist das Riff vom Meeresrand entfernt?

8. Die Spitze einer Leiter ist 1,9 m über dem Boden, ihr Fußende ist 1,7m von der Wand entfernt. Wie lange ist die Leiter?

5.3 Lösungen

1. a) π
   b) 45°
   c) $\frac{3\pi}{2}$

2. a) 27,5
   b) 0,88
   c) 70°

3. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $\alpha = 36{,}9°$

4. Es gilt $(p+q)^2 = b^2 + c^2$, $p^2 + h^2 = c^2$ und $q^2 + h^2 = b^2$. Einsetzen von $p^2 + h^2 = c^2$ und $q^2 + h^2 = b^2$ in $(p+q)^2 = a^2 + b^2$ ergibt schließlich $h = \sqrt{pq}$.

5. $\frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

6. 519,6 m

7. 266,5 m

8. 2,55 m

6 Vektorrechnung

6.1 Theorie

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Themen der Vektorrechnung wiederholt. Wir betrachten hier nur Vektoren der Ebene $\mathbb{R}^2$ und des Raums $\mathbb{R}^3$. Die Elemente dieser Mengen bestehen aus Tupeln (geordnete Listen) der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 sind reell, d. h. aus $\mathbb{R}$ und werden Komponenten oder Koordinaten der Tupel genannt. Die Mengen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind Vektorräume, da man ihre Elemente sinnvoll addieren und mit Zahlen multiplizieren kann, siehe im Detail weiter unten. Die Elemente (die Tupel) werden dann Vektoren genannt. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist 2-dimensional, der Raum $\mathbb{R}^3$ 3-dimensional, da man 2 bzw. 3 Zahlen zur Bestimmung eines Vektors benötigt.

Vektoren werden typischerweise wie in (35) als Spaltenvektoren geschrieben. Um Platz zu sparen, schreibt man sie gerne auch als Zeilenvektoren

$$x = (x_1, x_2) \text{ bzw. } x = (x_1, x_2, x_3). \tag{36}$$

Durch Transponieren werden Zeilen- zu Spaltenvektoren und umgekehrt:

$$(x_1, x_2)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^\top = (x_1, x_2, x_3) \tag{38}$$

Noch ein letzter Hinweis zur Schreibweise: Da im deutschsprachigen Raum Dezimalzahlen mit dem Komma geschrieben werden, z. B. 12,345 wird zum Trennen der Zahlen in einem Vektor oft der Strichpunkt verwendet, z. B. $x = (1{,}3; 2{,}4)$.

Vektoren können addiert und mit Skalaren (=Zahlen) multipliziert werden. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ (Ebene) oder $n = 3$ (Raum) und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren ist wie folgt definiert:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{39a}$$

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \tag{39b}$$

Diese Definitionen gelten übrigens auch für alle anderen Dimensionen $n \in \mathbb{N}$. Die Subtraktion von Vektoren ist definiert als $x - y := x + (-1)y$.

Vektoren werden oft durch Pfeile dargestellt, siehe Abbildung 15. Die Komponenten (=Koordinaten) der Pfeile bzgl. den Achsenrichtungen entsprechen den Komponenten (=Koordinaten) der Vektoren. Dabei müssen die Pfeile nicht notwendiger Weise beim Koordinatenursprung beginnen. Vektoren können auch als Punkte in der Ebene oder im Raum dargestellt werden, wobei die Koordinaten der Punkte den Koordinaten der Vektoren entsprechen.

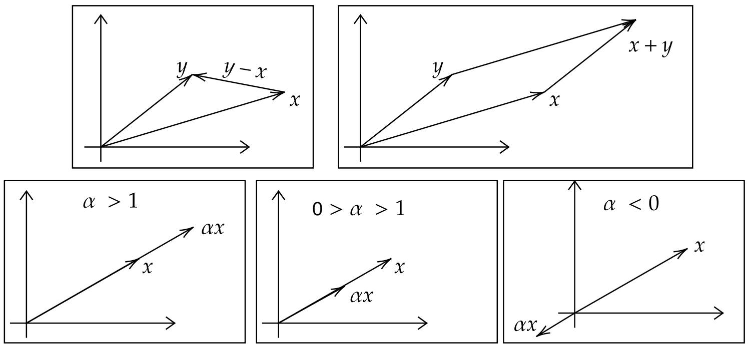

Abbildung 15: Links oben: Vektorsubtraktion, Rechts oben: Vektoraddition, Unten: skalare Multiplikation

Die Multiplikation eines Vektors x mit einem Skalar α kann als Streckung (für $\alpha > 1$) oder Stauchung (für $0 < \alpha < 1$) des Vektors interpretiert werden (für negatives α wird die Richtung zusätzlich umgedreht).

Das innere Produkt zweier Vektoren x und y im $\mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{40}$$

Oft wird das innere Produkt auch mit einem Multiplikationspunkt als $x \cdot y$ geschrieben. Daher kommt die Bezeichnung *dot product* im Englischen. Die Notation $\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$

bezeichnet die sogenannte Euklidische Norm des Vektors x und ist geometrisch die Länge des Vektors, da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{41}$$

gerade der Längenbestimmung von x mit Hilfe des Satzes von Pythagoras entspricht. Mit dem inneren Produkt kann auch der Winkel ϕ zwischen zwei Vektoren bestimmt werden, denn es gilt

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos(\phi). \tag{42}$$

Zwei Vektoren x und y sind somit orthogonal (rechtwinklig, normal) aufeinander, geschrieben als $x \perp y$, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren x und y in $\mathbb{R}^3$ ergibt wieder einen Vektor in $\mathbb{R}^3$ und ist wie folgt definiert:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren ist orthogonal zu x und y, siehe Abbildung 16. Die Länge (=Norm) des Kreuzprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren x und y aufgespannt wird, siehe Abbildung 16.

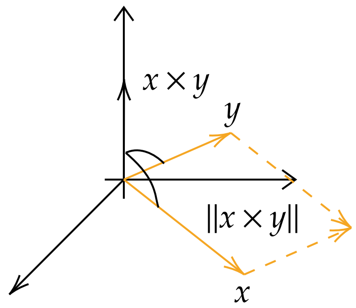

Abbildung 16: Kreuzprodukt

Geraden können durch einen Punkt p der Geraden und einem Richtungsvektor r wie folgt beschrieben werden.

$$x = p + \lambda r \tag{44}$$

Dabei ist λ der Parameter der Gerade. Jeder Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ entspricht über die Geradengleichung (44) genau einen Punkt x der Geraden. Diese Darstellung von Geraden nennt man daher Parameterdarstellung. In der Ebene erhält man eine weitere Darstellung mit Hilfe eines Punktes p der Geraden und eines Normalvektors n der Geraden:

$$\langle x - p, n\rangle = 0 \tag{45}$$

welche wir als Normalvektorform bezeichnen. Hier liegt der Vektor $x - p$ in der Geraden und ist somit orthogonal (=normal) zum Normalvektor n.

6.2 Aufgaben

1. Wir sagen, dass ein Vektor x normiert ist, wenn $\|x\| = 1$ gilt. Berechnen Sie $\frac{x}{\|x\|}$ für die folgenden Vektoren, und zeigen Sie, dass die Länge des berechneten Vektors gleich 1 ist.
   a) $(1; 1; 1)^\top$
   b) $(3; 4; 0)^\top$

2. Wie lautet die Gleichung der durch die Punkte $P_1 = (10; 5; -1)^\top$ und $P_2 = (1; 2; 5)^\top$ verlaufenden Geraden in Parameterform?

3. Liegen die drei Punkte $P_1 = (3; 0; 4)^\top$, $P_2 = (1; 1; 1)^\top$ und $P_3 = (-7; 5; -11)^\top$ in einer Geraden? Wie lautet gegebenenfalls die Gleichung dieser Geraden?

4. Zeigen Sie dass die Vektoren $a = (-1; 2; 5)^\top$ und $b = (-4; 8; -4)^\top$ orthogonal zueinander sind.

5. Welchen Winkel schließen die Vektoren a und b miteinander ein?
   a) $a = (3; 1; -2)^\top$, $b = (1; 4; 2)^\top$
   b) $a = (10; -5; 10)^\top$, $b = (3; -1; -1/2)^\top$

6. Ein Massenpunkt wird durch die Kraft $F = (10; -4; -2)^\top$ N geradlinig von $P_1 = (1; 20; 3)^\top$ m nach $P_2 = (4; 2; -1)^\top$ m verschoben. Welche Arbeit leistet diese Kraft? Welchen Winkel bildet sie mit dem Verschiebungsvektor? Hinweis: Arbeit = inneres Produkt von Kraft und Weg

7. Eine Kraft vom Betrag $\|F\| = 85$ N verschiebt einen Massenpunkt geradlinig um die Strecke $s = 32$ m und verrichtet dabei die Arbeit $W = 1360$ Nm. Unter welchem Winkel ϕ greift die Kraft an? Hinweis: Arbeit = inneres Produkt von Kraft und Weg

8. (*) Von einer Geraden g ist der Punkt $P_1 = (4; 2; 3)^\top$ und der Richtungsvektor $a = (2; 1; 3)^\top$ bekannt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4; 1; 1)^\top$ von dieser Geraden.

9. Berechnen Sie die Fläche des von den Vektoren $a = (1; -5; 2)^\top$ und $b = (2; 0; 3)^\top$ aufgespannten Parallelogramms.

10. Elektronen, die mit der Geschwindigkeit v in ein Magnetfeld der Flussdichte B eintreten, erfahren dort die sogenannte Lorentz-Kraft $F_L = -e(v \times B)$. Wie groß ist die Kraft auf ein Elektron mit der Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, wenn $v = (2000; 2000; 0)^\top$ m/s und $B = (0; 0; 0{,}1)^\top$ T ist.

11. Zeigen Sie die Anti-Kommutativität des Kreuzprodukts: $x \times y = -(y \times x)$.

12. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkte $P = (3; 1; -5)^\top$ in Richtung des Vektors $a = (3; -5; 4)^\top$ 20 Längeneinheiten entfernt liegt.

6.3 Lösungen

1. a) $\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)^\top$
   b) $\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{5}(3;4;0)^\top$

2. $x = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (nicht einzig mögliche Lösung)

3. ja, liegen auf der Gerade $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (nicht einzig mögliche Lösung)

4. $\langle a,b \rangle = (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 8 + 5 \cdot (-4) = 0$

5. a) 79,92°
   b) 51,34°

6. Arbeit: 110 Nm, Winkel: 57,49°

7. $\phi = 60°$

8. 1,22

9. 18,06

10. $F_L = 3{,}2 \cdot 10^{-17}(-1;1;0)^\top$

11. Aus Gleichung (43) mit Vertauschung von x mit y.

12. $Q = (11{,}49; -13{,}14; 6{,}31)^\top$

7 Differentialrechnung

7.1 Theorie

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Konzepte und Methoden der Differentialrechnung wiederholt. Mit den Regeln der Differentialrechnung wird aus einer Funktion ihre Ableitung berechnet, die wieder eine Funktion der selben unabhängigen Variablen ist. Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten und so weiter.

Im Detail: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : X \to Y, x \mapsto y = f(x)$ gegeben. Wir betrachten zwei Beispiele:

1. Mit x wird die Zeit in Sekunden beschrieben, und y ist der Ort eines Fahrzeugs zum Zeitpunkt x als Abstand in Metern von einem Referenzpunkt. Die Funktion f gibt somit den Ort y des Fahrzeugs zu jedem Zeitpunkt $x \in X$ als $f(x)$ an. Für eine gleichförmige Bewegung mit 5 m/s könnte die Funktionsgleichung z. B. so lauten: $f(x) = 10 + 5x$. Für den freien Fall aus einer Ruhelage z. B. so: $f(x) = \frac{g}{2}x^2$ mit $g = 9{,}81$ m/s^2 der Erdbeschleunigung.

2. Mit x wird die Zeit in Stunden beschrieben, und y ist der Speicherstand in kWh einer elektrischen Batterie. Die Funktion f gibt somit zu jedem Zeitpunkt $x \in X$ an, wie viel Energie in der Batterie ist. Für eine Batterie, die nicht geladen oder entladen wird, aber aufgrund von Selbstentladung Energie verliert, könnte die Funktionsgleichung z. B. so lauten: $f(x) = 2 \cdot e^{-0{,}0001x}$. Anfangs, d. h. zum Zeitpunkt $x = 0$, hat die Batterie 2 kWh Energieinhalt.

Die Ableitung f' einer Funktion f gibt zu jedem $x \in X$ die Änderungsrate der Funktion f bei x an und ist wieder eine Funktion: $f' : X \to Y, x \mapsto f'(x)$. Statt $f'(x)$ schreibt man auch oft y', $y'(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Zur Interpretation der Änderungsrate betrachten wir eine bestimmte, fixierte Stelle $a \in X$. Die Änderungsrate (= Ableitung) $f'(a)$ an dieser Stelle a gibt an, um wie viel sich die Funktion f bei a pro x-Einheit bei linearer Approximation ändert:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \tag{46}$$

Dabei ist $x - a$ die Abweichung des Wertes x von der Stelle a. Vergleichen Sie dazu die Gleichung einer Geraden g mit Steigung k, die durch den Punkt $(a, f(a))$ geht:

$$g(x) = f(a) + k \cdot (x - a) \tag{47}$$

Geometrisch gesehen ist $f'(a)$ die Steigung der Tangente (berührende Gerade an den Graphen) an die Funktion f an der Stelle a, siehe Abbildung 17, da die Tangente die beste lineare (geometrisch: gerade) Approximation an die Funktion bei a ist. Rechnerisch

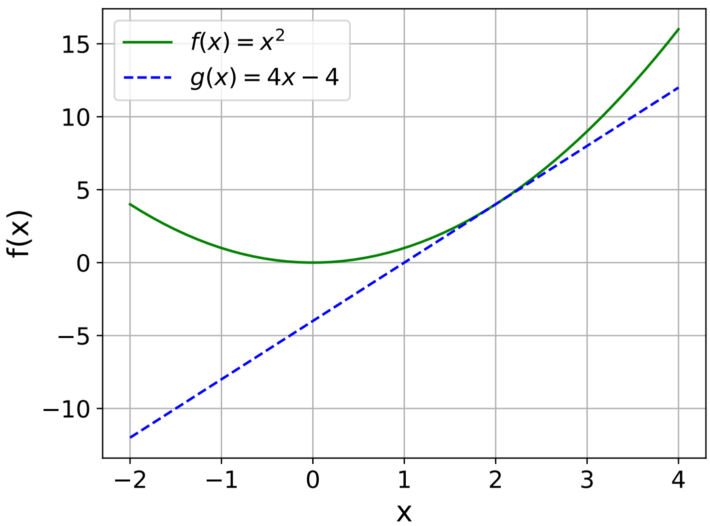

Abbildung 17: Funktion $f : [-2, 4] \to [0, 16], x \mapsto f(x) = x^2$ in grün und die Tangente $g : [-2, 4] \to [-12, 12], x \mapsto g(x) = 4x - 4$ an der Stelle $a = 2$ in blau.

ist die Ableitung $f'(a)$ definiert, indem man die Gleichung 46 nach $f'(a)$ umformt und den Grenzwert $x \to a$ bildet:

$$f'(a) \simeq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{48}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{49}$$

Für die praktische Berechnung werden aber die weiter unten angeführten Rechenregeln verwendet. Für unsere zwei obigen Anwendungsbeispiele erhalten wir mit Hilfe dieser Rechenregeln:

1. Die Ableitung $f'(x)$ ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs zum Zeitpunkt x in m/s. Im Falle der gleichförmigen Bewegung beträgt sie $f'(x) = 5$ m/s, da f bereits eine Gerade war. Für den freien Fall gilt $f'(x) = gx$, ebenfalls in m/s, was einer konstanten Beschleunigung mit g entspricht.

2. Die Ableitung $f'(x) = -0{,}0002 \cdot e^{-0{,}0001x}$ ist negativ und beschreibt den Energieverlust pro Stunde zu jedem Zeitpunkt $x \in X$. Die Ableitung hat die Einheit der elektrischen Leistung: kW.

Tabelle 3 enthält die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen. Für eine umfangreichere Tabelle sei z. B. auf die Seite www.qcweb.qc.edu.hk verwiesen.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a)a^x$

Tabelle 3: Ableitungen einiger wichtiger Funktionen, $a > 0$.

Differenzieren ist eine lineare Operation: Seien f, g zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \tag{50}$$

Folgende weitere Rechenregeln werden bei beim Differenzieren verwendet:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \text{Produktregel} \tag{51a}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{Quotientenregel} \tag{51b}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{Kettenregel} \tag{51c}$$

Eine Funktion f besitzt an einer Stelle a ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn in einer Umgebung U von a (vgl. Aufgabe 9) $f(a) \geq f(x)$ bzw. $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in U$ gilt.

- Eine Notwendige Bedingung hierfür ist die Existenz einer waagerechten Tangente an der Stelle a, also $f'(a) = 0$. Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend, denn z. B. erfüllt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$ an der Stelle $a = 0$ die Bedingung $f'(a) = 0$ aber keine der Bedingungen $f(a) \geq f(x)$ oder $f(a) \leq f(x)$ für alle x in einer Umgebung U von a.

- Eine Funktion f besitzt jedoch mit Sicherheit bei a ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn sie an dieser Stelle zusätzlich eine Rechts- bzw. Linkskrümmung besitzt. Dies ist der Fall, wenn an der Stelle a die 1. Ableitung Null ist und zugleich die 2. Ableitung kleiner bzw. größer als Null und somit ungleich Null ist: $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$. Für $f''(a) > 0$ liegt dabei ein lokales Minimum und für $f''(a) < 0$ ein lokales Maximum vor.

Von Bedeutung sind auch Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn ändert. Diese werden als Wendepunkte bezeichnet. Die Kurve geht dabei von einer Rechtskurve in eine Linkskurve über oder umgekehrt. Daher ist in solchen Punkten notwendigerweise $f''(a) = 0$. Diese Bedingung reicht jedoch nicht aus. Mit Sicherheit liegt ein Wendepunkt erst dann vor, wenn die 2. Ableitung an der betreffenden Stelle ihr Vorzeichen ändert. Dies ist genau dann der Fall, wenn die 3. Ableitung an dieser Stelle einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Insgesamt muss also gelten: $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$.

7.2 Aufgaben

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.
   a) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
   b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
   c) $f(x) = x^n e^x$
   d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
   e) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$

2. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen zweimal.
   a) $f(t) = e^{-0{,}8t}\cos(t)$
   b) $f(x) = x^3 \ln(x)$
   c) $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

3. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$ geht durch den Punkt $P(-1; 9)$. Die Steigung der Tangente im Punkt P ist -6. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f.

4. Eine nichtlineare Funktion $f(x)$ lässt sich in der Umgebung eines Kurvenpunktes $P = (x_0; y_0)$ näherungsweise durch die dortige Tangente ersetzen, d. h. linearisieren. Die in P errichtete Tangente hat die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle P somit gilt für den y-Wert der Tangente: $y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Approximieren Sie die e-Funktion durch die Tangente bei $x_0 = 0$, indem Sie die Tangentengleichung bestimmen.

5. Bestimmen Sie die Extremwerte (lokale Maxima und lokale Minima) der Funktion $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$.

6. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$. Bestimmen Sie zusätzlich, ob die Funktion gerade, ungerade oder weder noch ist. Zeichnen Sie anschließend die Funktion qualitativ. Wie sieht die Funktion Nahe der Polstellen und für sehr große negative oder positive Werte aus?

7. n Messungen einer Größe ergeben die Werte $a_1, \ldots, a_n$. Das Minimum der Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$ ist eine gute Schätzung für die gemessene Größe (Methode der kleinsten Quadrate). Wie groß ist die Schätzung?

8. Wie muss man den Radius und die Höhe einer zylindrischen Konservendose mit vorgegebenem Fassungsvermögen V wählen, wenn man so wenig Blech wie möglich zu ihrer Herstellung verwenden will? Hinweis: Die Oberfläche der Dose ist durch $2\pi r^2 + 2\pi r h$ gegeben, wenn r ihr Radius und h ihre Höhe ist.

9. Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang u ist jenes von größtem Flächeninhalt zu ermitteln. Bestimmen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

7.3 Lösungen

1. a) $f'(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$
   b) $f'(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$
   c) $f'(x) = e^x x^{n-1}(n + x)$
   d) $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$
   e) $f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$

2. a) $f''(t) = e^{-0.8t}(1{,}6 \sin(t) - 0{,}36 \cos(t))$
   b) $f''(x) = 6x \ln(x) + 5x$
   c) $f''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

3. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4}$

4. $T(x) = x + 1$

5. $x_1 = 0$, Relatives Minimum und $x_2 = 4$, Relatives Maximum.

6. Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, Polstellen: $x_3 = 0$, Extremwerte: Minimum an der Stelle $x_4 = \sqrt{3}$ und Maximum an der Stelle $x_5 = -\sqrt{3}$, Wendepunkte: $x_{6/7} = \pm\sqrt{6}$. Die Funktion ist ungerade. Siehe Abbildung 18.

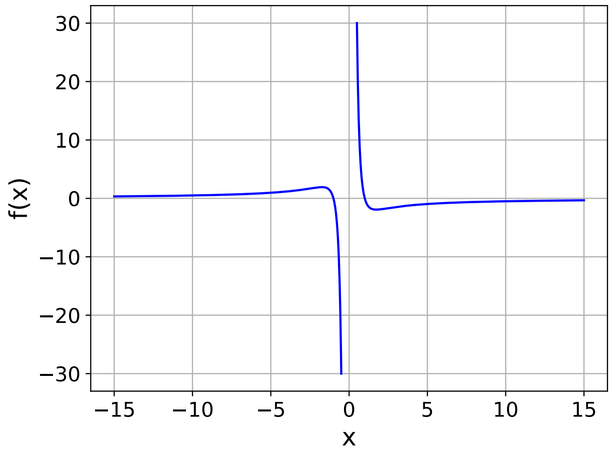

Abbildung 18: Kurvendiskussion

7. Arithmetische Mittel $(a_1 + \ldots + a_n)/n$ der n Messwerte.

8. $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2\sqrt[3]{V/(2\pi)}$

9. $l = b = \frac{u}{4}$

8 Integralrechnung

8.1 Theorie

In diesem Abschnitt werden das Konzept und die wichtigsten Methoden der Integralrechnung wiederholt. Durch das Integrieren einer Funktion $f(x)$ von einem Startwert $x = a$ bis zu einem Endwert $x = b$ wird das gesamthafte (=integrale) Maß (Inhalt, Ausmaß) der Funktion innerhalb dieser Grenzen berechnet. Je nach Funktion können damit unterschiedliche Größen bestimmt werden. Hier ein paar Beispiele:

1. Die Funktion $f(x)$ beschreibe die Geschwindigkeit eines in eine Richtung fahrenden Autos in m/s zu Zeitpunkten x, die in Sekunden ab einer Startzeit angegeben werden. Das Integral von $f(x)$ vom Zeitpunkt $x = a$ bis zum Zeitpunkt $x = b$ ist die Strecke in Meter, die das Auto in dieser Zeit zurückgelegt hat.

2. Die Funktion $f(x)$ beschreibe die aufgenommene Leistung (Verbrauch) einer Waschmaschine in kW über die Zeit x hinweg, die in Stunden gemessen wird. Das Integral

von $f(x)$ vom Zeitpunkt $x = a$ bis zum Zeitpunkt $x = b$ ist der Gesamtenergieverbrauch der Waschmaschine in kWh während dieser Zeit.

3. Der Funktion $f(x)$ beschreibe die Höhe in Meter einer Zwischenwand in einem Dachbodenzimmer. Die unabhängige Variable x gibt dabei den waagrechten Abstand in Meter am Boden von der Außenwand an, siehe Abbildung 19. Das Integral

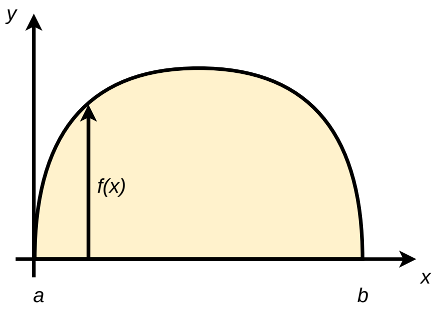

Abbildung 19: Zwischenwand

von $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ ist die Fläche der Wand in Quadratmeter.

4. Sie beschleunigen Ihr Fahrzeug über eine Strecke von $x = a$ bis $x = b$ Meter mittels einer Kraft $f(x)$ in Newton, die vom Ort x, in Meter gemessen, abhängig ist. Das Integral von $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ ist dann die von der Kraft geleistete Arbeit (aufgebrachte Energie) in Joule (Newtonmeter) während diesem Streckenabschnitt.

Angenommen die Funktion f ist die Ableitung einer Funktion F, also $F' = f$. Eine solche Funktion F wird als Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f bezeichnet. Die in den Beispielen beschriebenen Integralwerte haben die Einheiten der jeweiligen Stammfunktion F, z. B. war im ersten Beispiel $f(x)$ eine Geschwindigkeit in m/s mit in x in Sekunden. Stammfunktionswert $F(x)$ hat somit die Bedeutung einer Strecke $F(x)$ in Meter in Abhängigkeit des Zeitpunktes x. Das (bestimmte) Integral von $f(x)$ vom Zeitpunkt $x = a$ bis zum Zeitpunkt $x = b$ kann als Strecke zwischen diesen Zeitpunkten berechnet näherungsweise werden, indem die Zeit von a bis b in n kleine, aufeinanderfolgende Zeitabschnitte mit Zwischenzeitpunkten x_i unterteilt wird: $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$. Die zugehörigen gefahrenen Streckenabschnitte s_i in Meter sind näherungsweise die Geschwindigkeit in m/s zu Beginn eines Zeitabschnitts mal der Dauer des Zeitabschnitts in Sekunden:

$$s_1 \simeq f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \tag{52a}$$

$$s_2 \simeq f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) \tag{52b}$$

$$\vdots \tag{52c}$$

$$s_{n-1} \simeq f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) \tag{52d}$$

Kennt man nun eine Stammfunktion F von f, so weiß aus Gleichung (46) man, dass zum Beispiel

$$F(x_2) \simeq F(x_1) + F'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) = F(x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1). \tag{53}$$

Wenn man $F(x_1)$ auf die linke Seite bringt erhält man

$$F(x_2) - F(x_1) \simeq f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \simeq s_1. \tag{54}$$

Analog kann man auch die anderen Streckenabschnitte näherungsweise als Differenzen der Stammfunktion F darstellen. Nun berechnen wir näherungsweise die Gesamtstrecke s, die das Auto von Zeitpunkt a bis Zeitpunkt b zurückgelegt hat:

$$\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} && \text{(55a)}\\
&\simeq f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) && \text{(55b)}\\
&\simeq F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) && \text{(55c)}\\
&= F(x_n) - F(x_1) && \text{(55d)}\\
&= F(b) - F(a) && \text{(55e)}
\end{aligned}$$

Man kann schließlich beweisen, dass diese näherungsweise Berechnung für immer kürzere aber dafür immer mehr Zeitabschnitte immer genauer wird und zum exakten Wert der Gesamtstrecke und zur Differenz $F(b) - F(a)$ konvergiert:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(b) - F(a) = s. \tag{56}$$

Um diesen Übergang zum Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ darzustellen, wird statt dem Summenzeichen $\sum_{i=1}^{n-1}$ das Integralzeichen $\int_a^b$ zwischen den Grenzen a und b, statt $f(x_i)$ nur noch $f(x)$ und statt der Dauer $x_i - x_{i-1}$ die differenzielle Dauer $\mathrm{d}x$ geschrieben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{57}$$

Alle obigen Beispiele von sogenannten bestimmten Integralen können daher mit folgender Vorgehensweise berechnet werden:

1. Bestimme eine Stammfunktion F von f.

2. Berechne die Differenz der Stammfunktion zwischen den Grenzen a und b in der Reihenfolge $F(b) - F(a)$.

Der schwierige Teil dabei ist der erste Schritt, eine Stammfunktion zu finden. Dieser Schritt wird auch als unbestimmte Integration bezeichnet und als Integral ohne Grenzen geschrieben:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \tag{58}$$

Die Stammfunktion einer Funktion f ist nicht eindeutig, da man zu jeder Stammfunktion F eine beliebige Konstante (meist mit C bezeichnet) addieren kann, und so wieder eine Stammfunktion $F + C$ erhält. Durch das Bilden der Differenz $F(b) - F(a)$ fällt die Konstante aber bei der bestimmten Integration wieder weg, und das Ergebnis ist somit unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

Für eine umfangreiche Tabelle von Stammfunktionen sei auf die Seite www.integral-table.com verwiesen. Ähnlich zur Differentialrechnung existieren Rechenregeln für die Integralrechnung, die auf die Rechenregeln der Differentialrechnung zurückgeführt werden können:

- Partielle Integration (aus Produktregel):

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x \tag{59}$$

- Substitution (aus Kettenregel):

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = f(g(x)) \tag{60}$$

8.2 Aufgaben

1. Lösen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale. Verifizieren Sie Ihre Lösungen durch Differenzieren.
   a) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$
   b) $\int \frac{\tan(x)}{\sin(2x)}\, \mathrm{d}x$, Hinweis: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
   c) $\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$, Hinweis: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   d) $\int x \ln(x)\, \mathrm{d}x$
   e) $\int x \cos(x)\, \mathrm{d}x$
2. Lösen Sie die nachstehenden bestimmten Integrale.
   a) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-1}}$
   b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\, \mathrm{d}x$
   c) $\int_{-1}^{1} x e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$
3. Leiten Sie die Flächenformel $A = \frac{ab}{2}$ für ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen a und b mittels Integralrechnung her, siehe Abbildung 20.
4. Berechnen Sie das von den Parabeln $y = x^2 - 4x$ und $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$ eingeschlossene Flächenstück A.
5. Sei die Funktion $f(x) = -ax^2 + 3$ gegeben. Bestimmen Sie den Koeffizienten a so, dass die vom Graph der Funktion f und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt 4 hat.

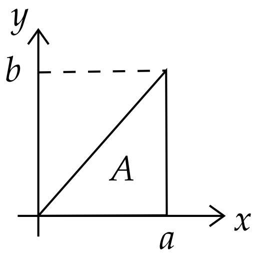

Abbildung 20: rechtwinkliges Dreieck

6. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat den Wendepunkt W(-1; 2). Der Punkt P(1; 4) liegt auf dem Graphen, und der Anstieg der Tangente in diesem Punkt beträgt 9. Berechnen Sie die Funktionsgleichung und die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

7. Bestimmen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen einer Kugel, indem Sie den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ um die x-Achse rotieren lassen. Hinweis: Verwenden Sie die Formel $V = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$ für das Rotationsvolumen.

8.3 Lösungen

1. a) $F(x) = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + C$
   b) $F(x) = \frac{1}{2} \tan(x) + C$
   c) $F(x) = \frac{\arctan(x)^2}{2} + C$
   d) $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$
   e) $F(x) = \sin(x)x + \cos(x) + C$

2. a) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
   b) $-\frac{\pi^2}{2}$
   c) 0

3. $f(x) = \frac{b}{a} x$ und damit $A = \int_{x=0}^{a} \frac{b}{a} x \, \mathrm{d}x = \frac{ab}{2}$

4. $A = 25$

5. $a = 3$

6. $f(x) = x^3 + 3x^2$, $A = \frac{27}{4}$

7. $\frac{4R^3\pi}{3}$