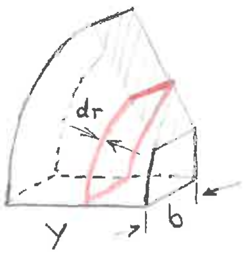
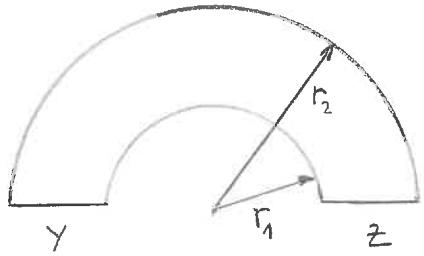
5. Felder – Teil 1

5.1) Geg.: $r_1 = 60\,mm$; $r_2 = 120\,mm$; $b = 30\,mm$; $\varrho = 20\,\Omega m$;

Ges.: $R = ?$

Lös.:





zwischen den Leiterenden Y und Z gilt:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A} \quad \text{mit } l = r \cdot \pi \text{ und } A = b \cdot dr \;;$$

$$G = \frac{1}{R} \;; \quad dG = \frac{dA}{\varrho \cdot r \cdot \pi} \;;$$

da die Leiterelemente parallel liegen, ist der zwischen den Enden Y und Z bestehend Gesamtleitwert G gleich der Summe aller dG in den Grenzen $r = r_1$ und $r = r_2$:

$$G = \int_{r_1}^{r_2} dG = \int_{r_1}^{r_2} \frac{b}{\varrho \cdot r \cdot \pi}\, dr = \frac{b}{\varrho \cdot \pi} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{b}{\varrho \cdot \pi} \cdot \left[\ln r\right]\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{b}{\varrho \cdot \pi} \cdot \left[\ln r_2 - \ln r_1\right] = \frac{b}{\varrho \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} =$$

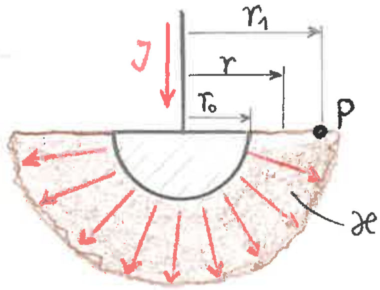
$$= \frac{30 \cdot 10^{-3} m}{20\,\Omega m \cdot \pi} \cdot \ln \frac{120\,mm}{60\,mm} = 3{,}31 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\Omega} \;;$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{1}{3{,}31 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\Omega}} = 3{,}02 \cdot 10^{3}\,\Omega = 3{,}02\,k\Omega \;;$$

5.2) Geg.: $r_0 = 0{,}50\,m$; $\varkappa = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\frac{S}{m}$; $J = 50\,A$; $r_1 = 1{,}0\,m$;

Ges.: a) $U = ?$ b) Erdübergangswiderstand $R = ?$

Lös.:



Durch den fließenden Strom J besteht im Erdreich ein Strömungsfeld mit radial nach außen laufenden Strömungslinien. Im Abstand r vom Mittelpunkt des Erders verteilt sich der Strom J auf den Mantel einer Halbkugel mit dem Radius r, also auf die Fläche $A = 2\pi \cdot r^2$.

Die Stromdichte beträgt an der Stelle r : $\mathcal{J} = \frac{J}{A} = \frac{J}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$;

und die elektr. Feldstärke beträgt an der Stelle r : $E = \frac{\mathcal{J}}{\varkappa} = \frac{J}{2\pi \cdot \varkappa \cdot r^2}$;

a)

die zwischen dem Erder und dem Punkt P liegende Spannung beträgt : $U = \int_{r_0}^{r_1} E\,dr = \int_{r_0}^{r_1} \frac{J}{2\pi \cdot \varkappa \cdot r^2}\,dr =$

$$= \frac{J}{2\pi\varkappa} \cdot \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{J}{2\pi\varkappa} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_1} = \frac{J}{2\pi\varkappa} \cdot \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right] =$$

$$= \frac{50\,A}{2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\Omega \cdot m}} \cdot \left[\frac{1}{0{,}50\,m} - \frac{1}{1{,}0\,m}\right] = 796\,V\ ;$$

b) zwischen dem Erder und einem unendlich weit entfernt liegenden Punkt beträgt die Spannung : $\boxed{U'} = \int_{r_0}^{\infty} E\,dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J}{2\pi \cdot \varkappa \cdot r^2}\,dr =$

$$= \frac{J}{2\pi \cdot \varkappa} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{J}{2\pi \cdot \varkappa} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty} = \boxed{\frac{J}{2\pi \cdot \varkappa \cdot r_0}}$$

* (Erdübergangswiderstand: Widerstand der zwischen dem Erder und einer gedanklich vorhandenen metallenen Halbkugelschale mit unendlich großem Radius besteht)

* Erdübergangswiderstand : $R = \frac{U'}{J} = \frac{1}{2\pi \cdot \varkappa \cdot r_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\Omega m} \cdot 0{,}50\,m} = 31{,}8\,\Omega$;

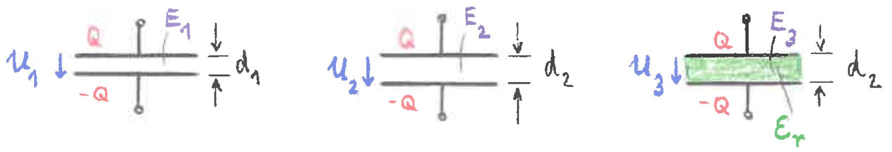
5.3) <u>Geg.:</u> $d_1 = 3{,}0\,\text{mm}$; $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$; $U_1 = 600\,\text{V}$;

a) Plattenabstand wird auf $d_2 = 4{,}0\,\text{mm}$ vergrößert

b) Isolierstoffplatte mit $\varepsilon_r = 5$ wird zwischen Platten geschoben

<u>Ges.:</u> a) $U_2 = ?$ b) $U_3 = ?$

<u>Lös.:</u>



a) Beim Verändern des Plattenabstandes bleibt die im Kondensator gespeicherte Ladung Q erhalten. Somit bleibt auch die zwischen den Platten herrschende elektrische Flussdichte $D = \frac{Q}{A}$ erhalten. Wegen $D = \varepsilon_0 \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot E_2$ sind die im Plattenraum herrschenden elektr. Feldstärken E_1 und E_2 gleich groß.

$$E = \frac{U}{d} \quad ; \quad E_1 = E_2$$

$$\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2} \quad \curvearrowright \quad \underline{U_2} = U_1 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 600\,\text{V} \cdot \frac{4{,}0\,\text{mm}}{3{,}0\,\text{mm}} = \underline{800\,\text{V}} ;$$

b) Beim Einfügen der Isolierstoffplatte bleiben Q und D ebenfalls unverändert.

$$D = \varepsilon \cdot E \quad ; \quad D_1 = D_2$$

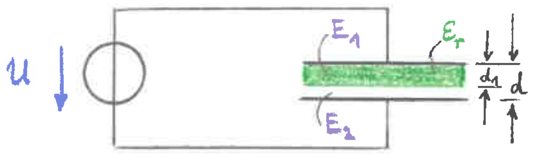
$$\varepsilon_0 \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E_2 \quad \curvearrowright \quad E_3 = \frac{E_2}{\varepsilon_r}$$

$$\text{mit } E = \frac{U}{d} : \quad \frac{U_3}{d_2} = \frac{U_2}{d_2 \cdot \varepsilon_r} \quad \curvearrowright \quad \underline{U_3} = \frac{U_2}{\varepsilon_r} = \frac{800\,\text{V}}{5} = \underline{160\,\text{V}} ;$$

5.4) Geg.: $d = 5{,}0\,mm$; $U = 500\,V$ $\varepsilon_r = 7$; $E_2 = 2{,}0 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$; $A = 50\,cm^2$;

Ges.: a) Dicke d_1 der Isolierstoffplatte , b) Kapazität C des Kondensators

Lös.:



In beiden vorhandenen Schichten (Isolierstoffplatte und Luftschicht) herrscht die gleiche elektr. Flussdichte D.

a)

$\Rightarrow$ $D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot E_2$

$\curvearrowright$ $E_1 = \frac{E_2}{\varepsilon_r}$

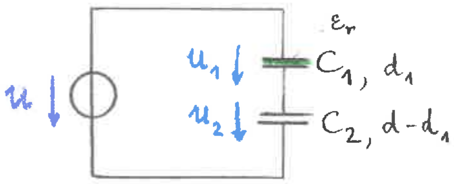
Spannung am Kondensator

Außerdem gilt : $U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot (d - d_1)$;

$$U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d - E_2 \cdot d_1 = d_1 \cdot (E_1 - E_2) + E_2 \cdot d = d_1 \cdot \left(\frac{E_2}{\varepsilon_r} - E_2\right) + E_2 \cdot d$$

$$\curvearrowright \quad d_1 = \frac{U - E_2 \cdot d}{E_2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)} = \frac{500\,V - 2{,}0 \cdot 10^5 \frac{V}{m} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,m}{2{,}0 \cdot 10^5 \frac{V}{m} \left(\frac{1}{7} - 1\right)} = 2{,}92 \cdot 10^{-3}\,m = 2{,}92\,mm \,;$$

b)



$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \,;$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 7 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-4}\,m^2}{2{,}92 \cdot 10^{-3}\,m} = 106 \cdot 10^{-12} \frac{As}{V} = 106\,pF \,;$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d - d_1} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 1 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-4}\,m^2}{2{,}08 \cdot 10^{-3}\,m} = 21{,}3 \cdot 10^{-12} \frac{As}{V} = 21{,}3\,pF \,;$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{106\,pF \cdot 21{,}3\,pF}{106\,pF + 21{,}3\,pF} = 17{,}7\,pF \,;$$

5. Felder – Teil 1

5.5) Geg.: $r = 6.350\ \text{km}$; $l = 1\ \text{m}$;

Ges.: $C = ?$

Lös.: Erdoberfläche $A = 4\pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6.350 \cdot 10^3\ \text{m})^2 = 5{,}067 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$;

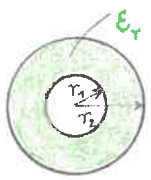
$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{l} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 1 \cdot \frac{5{,}067 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2}{1\ \text{m}} = 4.485\ \frac{\text{As}}{\text{V}} =$$

$$= 4.485\ \text{F} \ ;$$

5.6) Geg.: $r_1 = 4{,}5\ \text{cm}$; $r_2 = 9{,}0\ \text{cm}$; $\varepsilon_r = 4{,}2$; $E = 2{,}0 \cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$;

Ges.: a) $C = ?$ b) $U_{max} = ?$

Lös.:



a) $Q = D \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A \ \rightsquigarrow \ E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}$

mit $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ (Oberfläche der Kugel)

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \ ;$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \ ;$$

mit $Q = C \cdot U$: $\quad Q = C \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$$\Rightarrow C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} = 4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4{,}2 \cdot \frac{9{,}0 \cdot 4{,}5}{9{,}0 - 4{,}5} \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 42{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{F} =$$

$$= 42{,}1\ \text{pF} \ ;$$

b) Besteht zwischen den beiden Kugeln eine elektr. Spannung, so herrscht an der Oberfläche der inneren Kugel die größte elektr. Feldstärke. Sie kann bei der Ladung Q und mit $Q = C \cdot U$ dargestellt werden durch: $E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r_1^2} = \frac{C \cdot U}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_1^2}$;

$$\Rightarrow U = \frac{E \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_1^2}{C} = \frac{E \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_1^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1}} = \frac{E \cdot r_1^2 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 \cdot r_1} = \frac{E \cdot r_1 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2} \ ;$$

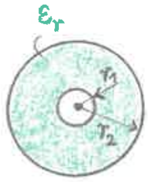
$$U = \frac{2{,}0 \cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot (9{,}0 - 4{,}5) \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{9{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 45 \cdot 10^3\ \text{V} = 45\ \text{kV} \ ;$$

5. Felder – Teil 1

5.7) <u>Geg.:</u> $l = 50\,m$; $r_1 = 0{,}8\,mm$; $r_2 = 4{,}0\,mm$; $\varepsilon_r = 2{,}0$; $U = 100\,V$;

<u>Ges.:</u> a) $C = ?$ b) $E_{max} = ?$

<u>Lös.:</u>



a) $Q = D \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A \quad \curvearrowright \quad E = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot A}$

mit $A = 2\pi \cdot r \cdot l$ (Oberfläche des Zylinders)

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon}$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon \cdot r}\,dr = \frac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1} \;;$$

mit $Q = C \cdot U$: $\quad Q = C \cdot \dfrac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\dfrac{r_2}{r_1}$

$$\Rightarrow \underline{C} = \frac{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 50\,m \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm} \cdot 2{,}0}{\ln\frac{4{,}0\,mm}{0{,}8\,mm}} = 3{,}457 \cdot 10^{-9}\,\frac{As}{V} =$$

$$= \underline{3{,}46\,nF} \;;$$

b) Die größte elektr. Feldstärke herrscht auf der Oberfläche des Innenleiters (also bei $r = r_1$) und beträgt bei der Ladung Q mit $Q = C \cdot U$:

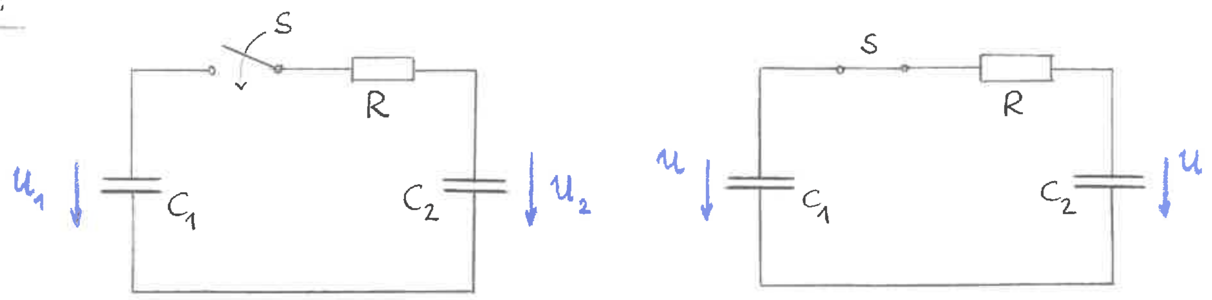
$$E = \frac{Q}{2\pi \cdot r_1 \cdot l \cdot \varepsilon} = \frac{C \cdot U}{2\pi \cdot r_1 \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot U}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_1 \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$\curvearrowright \underline{E} = \frac{U}{r_1 \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{100\,V}{0{,}8 \cdot 10^{-3}\,m \cdot \ln\frac{4{,}0\,mm}{0{,}8\,mm}} = 7{,}767 \cdot 10^4\,\frac{V}{m} = \underline{77{,}67\,\frac{kV}{m}} \;;$$

5.8) Geg.: $C_1 = 10\,\mu F$; $C_2 = 5\,\mu F$; $U_1 = 120\,V$; $U_2 = 60\,V$;

Ges.: a) $U = ?$ b) $W = ?$

Lös.:



a) Beim Schließen des Schalters bleibt die in den Kondensatoren insgesamt gespeicherte elektrische Ladung erhalten:

$$\underline{Q} = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 = 10 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} \cdot 120\,V + 5 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} \cdot 60\,V = \underline{1{,}5 \cdot 10^{-3}\,As} ;$$

Lediglich die Ladungsaufteilung ändert sich. D.h. die Kondensatorspannungen nehmen den gleichen Wert an:

$$\underline{\underline{U}} = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\,As}{(10+5) \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}} = \underline{\underline{100\,V}} ;$$

b) Vor dem Schließen des Schalters ist in beiden Kondensatoren zusammen die gespeicherte Energie:

$$W_I = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_1^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} \cdot (120\,V)^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} \cdot (60\,V)^2 =$$
$$= 81{,}0 \cdot 10^{-3}\,VAs = 81{,}0\,mJ ;$$

Nach dem Schließen des Schalters beträgt die gespeicherte Energie:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \cdot (C_1 + C_2) \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot (10+5) \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} \cdot (100\,V)^2 = 75{,}0 \cdot 10^{-3}\,VAs = 75\,mJ ;$$

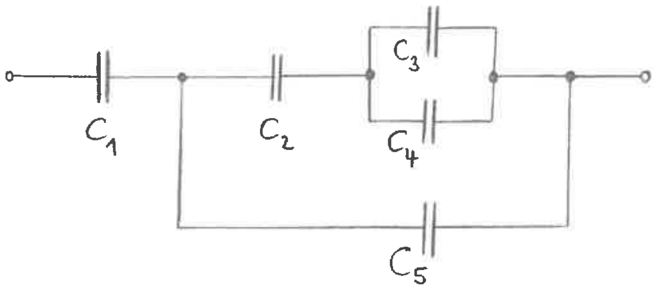
Die Differenz beider Energien wird dem Widerstand R zugeführt und in Wärme umgesetzt:

$$\underline{\underline{W}} = W_I - W_{II} = 81{,}0\,mJ - 75{,}0\,mJ = \underline{\underline{6{,}0\,mJ}} ;$$

5.9) Geg.: $C_1 = 1\,\mu F$; $C_2 = 2\,\mu F$; $C_3 = 3\,\mu F$; $C_4 = 4\,\mu F$; $C_5 = 5\,\mu F$;

Ges.: Gesamtkapazität $C = ?$

Lös.:



① $C_{34} = C_3 + C_4 = 3\,\mu F + 4\,\mu F = 7\,\mu F$;

② $C_{234} = \dfrac{C_2 \cdot C_{34}}{C_2 + C_{34}} = \dfrac{2\,\mu F \cdot 7\,\mu F}{2\,\mu F + 7\,\mu F} = 1{,}56\,\mu F$;

③ $C_{2345} = C_{234} + C_5 = 1{,}56\,\mu F + 5\,\mu F = 6{,}56\,\mu F$;

④ $C_{12345} = \dfrac{C_1 \cdot C_{2345}}{C_1 + C_{2345}} = \dfrac{1\,\mu F \cdot 6{,}56\,\mu F}{1\,\mu F + 6{,}56\,\mu F} = 0{,}87\,\mu F$;

$\Rightarrow$ $C = 0{,}87\,\mu F$;