Übungen Mehrdimensionale Analysis am 02. 03. 2024

1.)
Man bestimme das totale oder vollständige Differential der folgenden Funktionen,

a.) $z(x,t) = \frac{t^2+x}{2t-4x}$

b.) $u(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.)
Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ in impliziter Form.

a.) Bestimmen sie die Steigung der Tangente in einem Punkt $P = (x,y)$

b.) Zeigen sie, dass die Kurve im Punkt $Q = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ eine waagrechte Tangente hat.

3.)
Berechnen sie den Gradienten von f sowie den Betrag des Gradienten im gegebenen Punkt P.

a.) $f(x,y,z) = 10x^2y^3 - 5xyz^2$ $\qquad$ $P = (1,-1,2)$

b.) $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + yz^3$ $\qquad$ $P = (2,0,1)$

4.)
In welchen Punkten der xy-Ebene verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y-4y \end{pmatrix}$$

5.)
Bestimmen sie die Divergenz des Gradienten der folgenden skalaren Funktion.

$$F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$$

6.)
Wie sind die Parameter a und b zu wählen, damit die Rotation Vektorfeldes $\vec{F}$ überall verschwindet.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

7.)
Zeigen sie rot grad f = 0 und divrot $\vec{F}$ ist immer Null.

1a)

$$u(x,t) = \frac{t^2+x}{2t-4x}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dt$$

$$du = \frac{1.(2t-4x)+(t^2+x)\cdot 4}{(2t-4x)^2}\,dx + \frac{2t\cdot(2t-4x)-(t^2+x)\cdot 2}{(2t-4x)^2}\,dt$$

$$du = \frac{4t^2+2t}{(2t-4x)^2}\,dx + \frac{2t^2-2x-8xt}{(2t-4x)^2}\,dt$$

1b.) $u(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

$$du = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}x}{x^2+y^2+z^2}\,dx + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}y}{x^2+y^2+z^2}\,dy + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\cancel{2}z}{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

$$du = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dz + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

2.)

a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = C$ $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$2(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy') - 4x + 4yy' = 0$$

$$(2x^2+2y^2)(2x+2yy') - 4x + 4yy' = 0$$

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2yy' + 4y^3y' - 4x + 4yy' = 0$$

$$y'\cdot(4x^2y + 4y^3 + 4y) = 4x - 4x^3 - 4xy^2$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{x - x^3 - xy^2}{x^2y + y^3 + y}}}$$

b) $Q = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

$$y'(Q) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{8}3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}} = \underline{\underline{0}}$$

30.) $f(x,y,z) = 10x^2y^3 - 5xyz^2$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 20xy^3 - 5yz^2 \\ 30x^2y^2 - 5xz^2 \\ -10xyz \end{pmatrix}$$

i Punkt $P = (1,-1,2)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -20 + 20 \\ 30 - 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$|\text{grad } f| = \sqrt{500} = \underline{\underline{10 \cdot \sqrt{5}}}$$

36.) $f(x,y,z) = x^2 e^{yz} + yz^3$ $\quad P = (2,0,1)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2xe^{yz} \\ x^2 z e^{yz} + z^3 \\ 3yz^2 \end{pmatrix}$$

grad f in Punkt P $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|\text{grad}| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} =$$

4) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y - 4y \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = y^2 + x^2 - 4$$

$$\operatorname{div} \vec{F} \overset{!}{=} 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Die Divergenz ist auf ein Kreis Radius $r = 2$ und Mittelpunkt im Ursprung gleich Null.

5.) $F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$

$$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2\cdot(x-1) \\ 2\cdot(y-5) \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} F = 2 + 2 + 2 = \underline{\underline{6}}$$

6) $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3 z \\ a x y^2 z \\ 2x^2 z + b x y^3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} 3bxy^2 - axy^2 \\ \cancel{4xz} + y^3 - \cancel{4xz} - by^3 \\ ay^2 z - 3y^2 z \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

aus I: $xy^2 \cdot (3b - a) = 0$

aus II: $y^3 \cdot (1 - b) = 0 \rightarrow b = 1$

aus III: $y^2 z \cdot (a - 3) = 0 \rightarrow a = 3$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3 z \\ 3xy^2 z \\ 2x^2 z + x y^3 \end{pmatrix}$$

7.) $f = f(x, y, z)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{rot grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{div grad } F = \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$