Übungen Mathematik II am 15. 06. 2024

1.)

Berechnen sie das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $\vec{F}$ über die Mantelfläche eines Viertelzylinders im ersten Quadranten . R = 4 und H = 5. Verwenden sie Zylinderkoordinaten.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xz \end{pmatrix}$$

2.)

Berechnen sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche einer Kugel in Kugelkoordinaten.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

3.)

Berechnen die die Oberfläche eines Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ bis zur Höhe h = 2.

4.)

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F}$ und die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.
Berechnen sie das Oberflächenintegral von rot $\vec{F}$

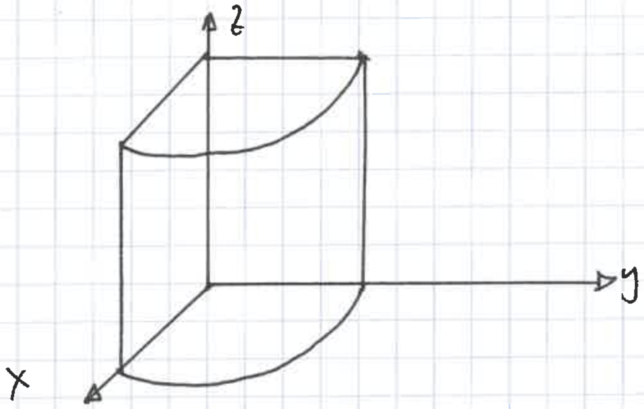
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix}$$

5.)

Das radialsymmetrische Vektorfeld $\vec{F}$ mit der Darstellung $\vec{F} = r^n . \vec{e_r}$ durchflute eine Kugelschale mit dem Radius R. Der Mittelpunkt liegt im Koordinatenursprung. Wie groß ist der Vektorfluß.

1.) $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xz \end{pmatrix}$ $R = 4$

$h = 5$



$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos\varphi \\ 4 \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin\varphi \\ 4 \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -4\sin\varphi \\ 4\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$F = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{5} \begin{pmatrix} 4\sin\varphi \\ 4\cos\varphi \\ 4\cos\varphi \cdot z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \, dz$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{5} 16\sin\varphi\cos\varphi + 16\sin\varphi\cos\varphi \; d\varphi \, dz$$

$$= 5 \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin\varphi \cos\varphi \; d\varphi$$

$$= 5 \cdot 32 \cdot \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 5 \cdot 16 = \underline{\underline{80}}$$

2.) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ $\quad x^2+y^2+z^2 = 25$

$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 5 \sin\vartheta \cos\varphi \\ 5 \sin\vartheta \sin\varphi \\ 5 \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} 5 \cos\vartheta \cos\varphi \\ 5 \cos\vartheta \sin\varphi \\ -5 \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -5 \sin\vartheta \sin\varphi \\ 5 \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 5 \cos\vartheta \cos\varphi \\ 5 \cos\vartheta \sin\varphi \\ -5 \sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \sin\vartheta \sin\varphi \\ 5 \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 25 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ 25 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ 25 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix}}}$$

$$F = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ -5 \sin\vartheta \cos\varphi \\ 5 \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ 25 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ 25 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{250 \sin^3\vartheta \cos^2\varphi}_{\mathrm{I}} - \underbrace{125 \sin^3\vartheta}_{\mathrm{II}} \sin\varphi\cos\varphi + 125 \underbrace{\sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{\mathrm{III}} \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\mathrm{III}: \quad 125 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 125 \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{250\pi}{3}(-1-1) = \underline{\underline{\frac{500\pi}{3}}}$$

$$\mathrm{II}: \quad 125 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3\vartheta \sin\varphi\cos\varphi \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 125 \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\right) \sin\varphi\cos\varphi \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 125 \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right)\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathrm{I}: \quad 250 \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\varphi)\right) d\varphi \, d\vartheta$$

$$250 \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \left(\cancel{2}\pi + \cancel{X} - \cancel{X}\right)\left(-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 250\pi \cdot \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 250\pi \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{250\pi \cdot \frac{4}{3}}}$$

$$F = 250\pi \frac{4}{3} + \frac{500\pi}{3} = \frac{1500\pi}{3} = \underline{\underline{500\pi}}$$

3) $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}$ $\quad z_{max} = 2$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial r}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r \cdot \sqrt{4r^2+1}$$

$$O = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \cdot \sqrt{4r^2+1} \, dr \, d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (4r^2+1)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot (27-1) = \frac{\pi}{6} 26 = \frac{\pi}{3} 13 = \underline{\underline{13,6135}}$$

4.) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 3 \sin\vartheta \cos\varphi \\ 3 \sin\vartheta \sin\varphi \\ 3 \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 9 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ 9 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ 9 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ 9 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ 9 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta$$

$$27 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2\vartheta \Big|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{27\pi}}$$

5) $\vec{F} = r^4 \cdot \vec{e_r} = \begin{pmatrix} r^4 \sin\vartheta \cos\varphi \\ r^4 \cdot \sin\vartheta \sin\varphi \\ r^4 \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix}$

Kugelfläche: $\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \sin\varphi \\ R \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$F = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \begin{pmatrix} R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^4 \sin\vartheta \cos\varphi \\ R^4 \sin\vartheta \sin\varphi \\ R^4 \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot d\vartheta \, d\varphi$$

$$F = R^4 \cdot R^2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta \, (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}) + \sin\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$F = R^4 \cdot R^2 \cdot 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \cancel{- \sin\vartheta \cos^2\vartheta} \cancel{+ \sin\vartheta \cos^2\vartheta} \, d\vartheta$$

$$F = R^4 \cdot R^2 \cdot 2\pi \quad (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi} = R^4 \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot (1+1) = \underline{\underline{R^4 \cdot 4R^2\pi}}$$