Übungen Mehrdimensionale Analysis am 24. 02. 2024

1.)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

Berechnen sie alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

2.)

Zeigen sie, dass die gemischten Ableitungen 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ gleich sind.

3.)

Berechnen sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion
$f(x,y,z) = e^{(x-y)}.\cos(5z)$

4.)

Berechnen sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion
$f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \arctan(\frac{y}{x})$.

5.)

Zeigen sie das die Funktion $u(x,y,z) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + b$ eine Lösung der Laplacegleichung ist.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad \text{a und b sind Konstante.}$$

6.)

Bestimmen sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (2,1,f(x,y))$.

$$f(x,y) = 3.\sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2\cos(\pi.(x + 2y))$$

1.) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \underline{\underline{\frac{2y}{(x+y)^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \underline{\underline{\frac{-2x}{(x+y)^2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2y\cdot 2\cdot\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}} = \underline{\underline{\frac{-4y}{(x+y)^3}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{(x+y)^2}\right) = \frac{2x\cdot 2\cdot\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}} = \underline{\underline{\frac{4x}{(x+y)^3}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2\cdot(x+y)^{\cancel{2}}+2x\cdot 2\cdot\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2x-2y+4x}{(x+y)^3} = \underline{\underline{\frac{2x-2y}{(x+y)^3}}}$$

2.)

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2+y) = \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+y}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2+y) = \frac{1}{x^2+y} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{x^2+y}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x}{x^2+y} = \frac{-2x \cdot 1}{(x^2+y)^2} = \underline{\underline{-\frac{2x}{(x^2+y)^2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+y} = \frac{-2x}{(x^2+y)} = \underline{\underline{-\frac{2x}{(x^2+y)^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f_{xy} = f_{yx}}}$$

3) $f(x,y,z) = e^{x-y} \cdot \cos(5z) = e^{x} \cdot e^{-y} \cdot \cos(5z)$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x} e^{-y} \cdot \cos(5z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -e^{x} e^{-y} \cdot \cos(5z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -5\, e^{x} \cdot e^{-y} \cdot \sin(5z)
\end{aligned}\right\} \text{1. Ableitungen}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x} \cdot e^{-y} \cdot \cos(5z) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x} \cdot e^{-y} \cdot \cos(5z \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -25\, e^{x} \cdot e^{-y} \cdot \cos(5z) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\, e^{x} e^{-y} \cdot \cos(5z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -5\, e^{x} e^{-y} \sin(5z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 5\, e^{x} \cdot e^{-y} \sin(5z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}
\end{aligned}\right\} \text{2. Ableitungen}$$

4) $f(x,y) = \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{y^2} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{\underline{0}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2}$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \underline{\underline{0}}$$

5.) $u(x,y,z) = a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + b$

$$u_x = a \cdot -\cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot \cancel{2}x = -ax \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$u_{xx} = -a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - a \cdot x \cdot \left(\frac{-3}{\cancel{2}}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot \cancel{2}x$$

$$\underline{\underline{u_{xx} = -a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3ax^2 (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}}}$$

$$u_y = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y = -ay (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$u_{yy} = -a (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - ay \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2y$$

$$\underline{\underline{u_{yy} = -a (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3ay^2 (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}}}$$

$$\underline{\underline{u_{zz} = -a (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3az^2 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}}}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$-a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot (3) + 3a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot (x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$-3a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3a \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = 0$$

$$\underline{\underline{0 = 0}}$$

6) $f(x,y) = 3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2\cos(\pi x + 2\pi y)$

$$f(x,y) = 3\,x \cdot y^{-1/2} + 2\cos(\pi x + 2\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} - 2\sin(\pi x + 2\pi y) \cdot \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x=2,\ y=1) = 3 - 2\sin(2\pi + 2\pi) \cdot \pi = \underline{\underline{3}}$$

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-3/2} - 2\sin(\pi x + 2\pi y) \cdot 2\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x=2,\ y=1) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) 1 - 2\sin(2\pi + 2\pi) \cdot 2\pi = \underline{\underline{-3}}$$

$$\vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x=2,\ y=1) = 6 + 2\cos(2\pi + 2\pi) = 8$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3x + 3y + z + 6 - 3 - 8 = 0$$

$$\underline{\underline{-3x + 3y + z = 5}}$$