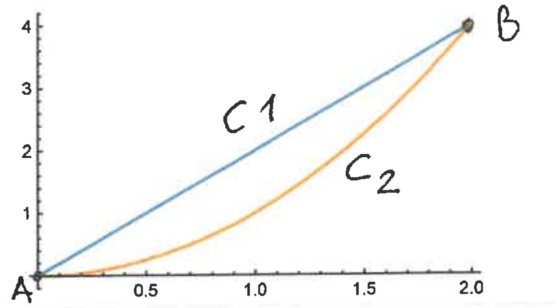
Übungen Mathematik II am 18. 05. 2024

1.)

Berechnen sie das Linienintegral $\int_C \; y\,dx \; + (x^2 + xy)dy$ längs der nachstehend skizzierten Verbindungswege der Punkte A = 0,0 und B = (2,4).



2.)

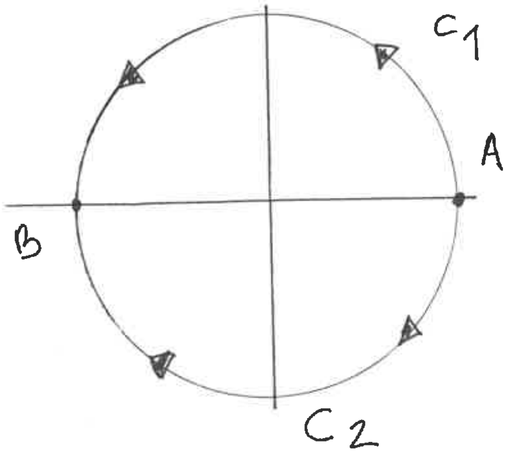
Zeigen sie, dass die folgenden Linienintegrale wegunabhängig sind und bestimmen sie die zugehörige Potentialfunktion.

a.) $\int_C \; (2xy + 4x)\,dx \; + (x^2 - 1)dy$

b.) $\int_C \; (3x^2y + y^3)\,dx \; + (x^3 + 3xy^2)\,dy$

3.)

Berechnen sie die Arbeit des Kraftfeldes vom Punkt A zum Punkt B entlang der Kurven C_1 und C_2.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{y}{1+x^2+y^2} \\ \frac{-x}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

4.)

Berechnen sie die Arbeit des Kraftfeldes entlang der Schraublinie.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ yz \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t = [0, 2\pi]$$

5.)

Zeigen sie, dass das räumliche Kraftfeld $\vec{F} = r^2 . \vec{r}$ konservativ ist.

1.) C_1:

1. Weg: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} y \\ x^2+xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} 2t \\ t^2+2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t=0}^{2} 2t + 6t^2 dt = t^2 + 2t^3 \Big|_0^2 = 4 + 16 = \underline{\underline{20}}$$

2. Weg: $y = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \underline{\underline{2}}$

$$\int_C y\,dx + (x^2 + y \cdot x)\,dy = \int_{x=0}^{2} \left(2x + (x^2+xy) \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} 2x + (x^2+2x^2) \cdot 2\,dx = \int_{x=0}^{2} 6x^2 + 2x\,dx$$

$$= 2x^3 + x^2 \Big|_0^2 = 16 + 4 = \underline{\underline{20}}$$

C_2 : $y = x^2$ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

1.Weg

$$\int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 t^2 + 2t^3 + 2t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2} + \frac{2}{5} t^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3} + 8 + \frac{2}{5} 32 = \frac{40 + 120 + 192}{15} = \frac{352}{15}$$

2.Weg: $y = x^2$ $y' = 2x$

$$\int_{x=0}^{2} \left(x^2 + (x^2 + x^3) \cdot 2x \right) dx$$

$$\int_{x=0}^{2} x^2 + 2x^3 + 2x^4 \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{352}{15}$$

2.) a) gilt: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Rightarrow$ [illegible]

$$\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy + 4x \\ x^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$d\varphi = \underbrace{(2xy + 4x)}_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx + \underbrace{(x^2 - 1)}_{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + 4x$$

$$\varphi = x^2 y + 2x^2 + k(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{x^2} + \frac{dk}{dy} = \cancel{x^2} - 1$$

$$\underline{\underline{k = -y}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = x^2 y + 2x^2 - y + C}}$$

2.6)

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} 3x^2y+y^3 \\ x^3+3xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2+3y^2-3x^2-3y^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$d\varphi = (3x^2y+y^3)\,dx + (x^3+3xy^2)\,dy$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y+y^3$$

$$\varphi = x^3y + xy^3 + k(y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \cancel{x^3} \cancel{+3xy^2} + \frac{dk}{dy} = \cancel{x^3} \cancel{+3xy^2}$$

$$\frac{dk}{dy} = \text{const.}$$

$$\underline{\underline{\varphi = x^3y + xy^3 + C}}$$

3) C_1: $\quad r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \cdot [0, \pi]$

$$W = \int_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ \dfrac{-\cos(t)}{1+\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$W = \int_{t=0}^{\pi} \frac{-\sin^2(t) - \cos^2(t)}{2} dt = -\frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

C_2: $\quad r(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$

$$W = \int_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ \dfrac{-\cos(t)}{1+\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$W = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot t \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

4.) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ yz \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$W = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ 1 \\ t \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t)\cos(t) + \cos(t) + t\sin(t) \; dt$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3(t) + \sin(t) + \left(t(-\cos(t)) + \int \cos(t)\,dt \right)$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3(t) + \sin(t) - t\cos(t) + \sin(t)$$

$$= \left. -\frac{1}{3}\sin^3(t) + 2\sin(t) - t\cos(t) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{-2\pi}}$$

5.)

konservativ $\rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$

$$\vec{F} = r^2 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 + xz^2 \\ x^2y + y^3 + z^2y \\ x^2z + y^2z + z^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} 2yz - 2yz \\ 2xz - 2xz \\ 2xy - 2xy \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$