

FH Vorarlberg
Integraltransformation

Signale und Systeme

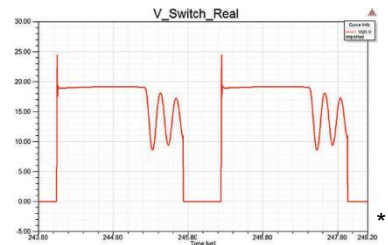
Foliensatz 1 – Signale / Systeme / Stabilität

- ◆ Definition Signal (Informationsträger)
- ◆ Klassifizierung von Signalen (Energiegehalt, Form, Funktionswerte, Zeitwerte,..)
- ◆ Wichtige Testsignale / Elementarsignale
- ◆ „Maße“ und „Pegel“
- ◆ Definition System
- ◆ Klassifizierung System (Zeitvarianz, Stabilität, Dimensionen, Funktionswerte, Linearität, Kausalität,....)
 - LTI – Systeme
- ◆ Stabilität (Bedeutung, Arten, Kriterien, Überprüfung)

Definition und Klassifizierung von Signalen

„Unter einem Signal versteht man den Verlauf einer messbaren Größe, die in der Regel eine Information trägt. Handelt es sich dabei um einen zeitlichen Verlauf, so spricht man von einem Zeitsignal.“

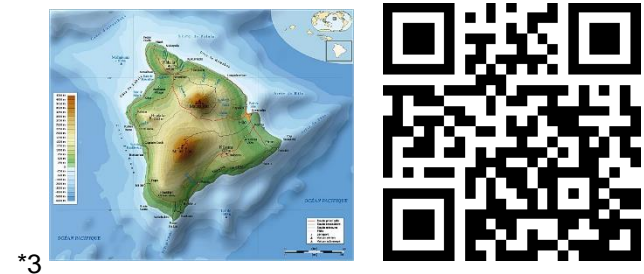
Beispiele für Signale:



Zeitsignal $y(t)$
z.B. Spannung, Strom, Druck,
Wasserpegel



Ortsabhängiges Signal $y(x)$
z.B. Höhenlage vs. Ort $h(x)$,
Geschwindigkeit vs. Ort $v(x)$

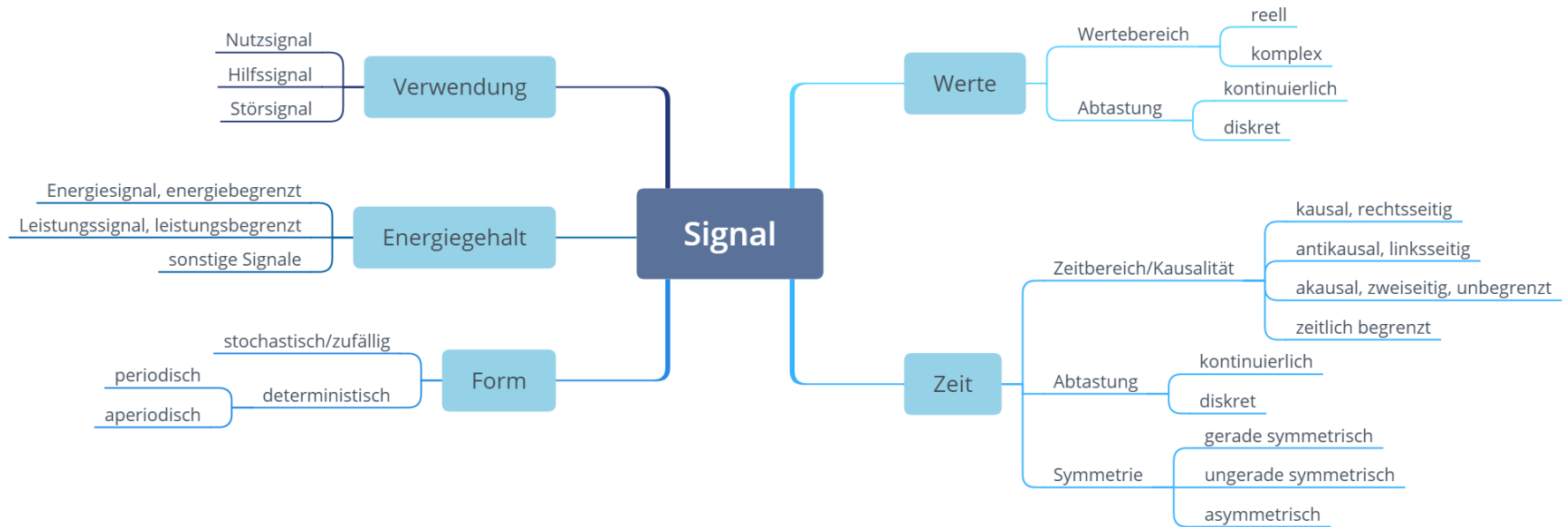


*3

Mehrdimensionale Ortsabhängiges Signal
z.B. Topologie $z(x,y)$,
Bilder $f(x,y)$

Beispiele für weitere Signale:

$f(T)$, $f(p)$, $f(U)$,



Verwendung:

- ◆ Nutzsinal:
 - Signal, welches die gewünschte Information trägt
 - ◆ Hilfssignal
 - Speziell generiertes Signal welches zur Weiterverarbeitung benötigt wird
 - ◆ Störsignal
 - Unerwünschtes Signal welches das System beeinflusst (meist stochastisch/zufällig, z.B. Rauschen, äußere Einflüsse etc.)
-

Form:

◆ Stochastisch/zufällig

- Verlauf im Voraus unbekannt, kann nur mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden, bei jeder erneuten Beobachtung eines Zufallsprozesses $x(t)$ erhält man eine andere Musterfunktion $x_i(t)$

◆ Deterministisch

- Ein deterministisches Signal ist für jeden Zeitpunkt t oder Index n vollständig bekannt.

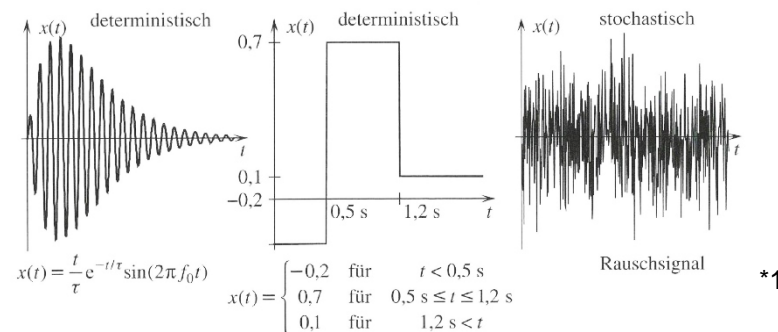
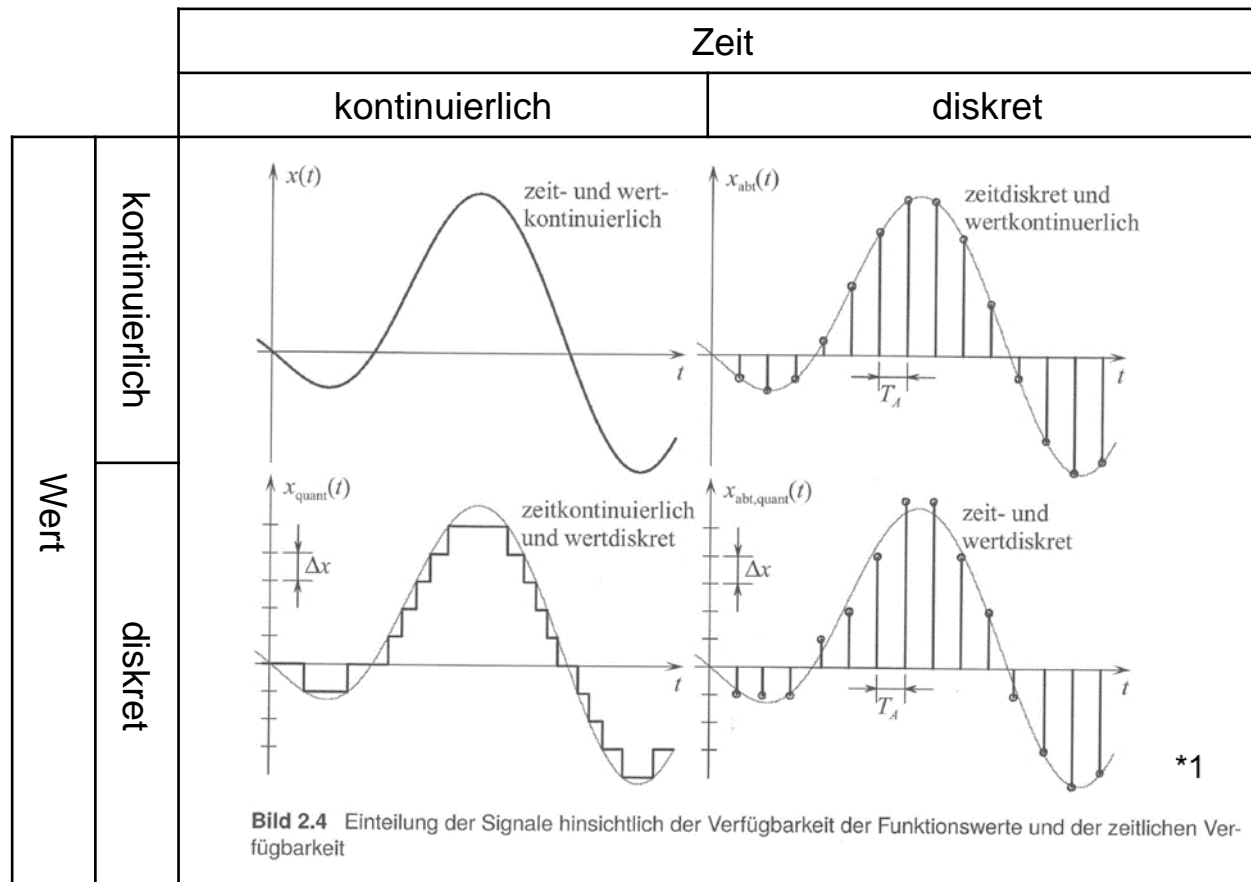


Bild 2.6 Deterministische und stochastische Signale

Zeitliche und wertmäßige Abtastung:



Zeitliche Symmetrie:

◆ Gerade Funktion

- Wenn $x(t) = x(-t), \forall t$

◆ Ungerade Funktion

- Wenn $x(t) = -x(-t), \forall t$

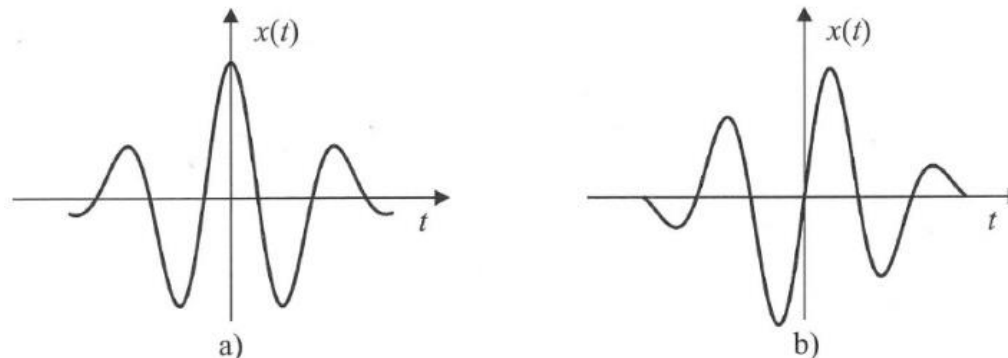


Bild 1.6 Symmetrien von Signalen. a) gerade; b) ungerade;

*1

Zeitbereich / Kausalität:

◆ Zeitlich begrenzt

- Wenn Signal $x(t) = 0$ für $t < t_1$ und $t > t_2$

◆ Kausal, rechtsseitig

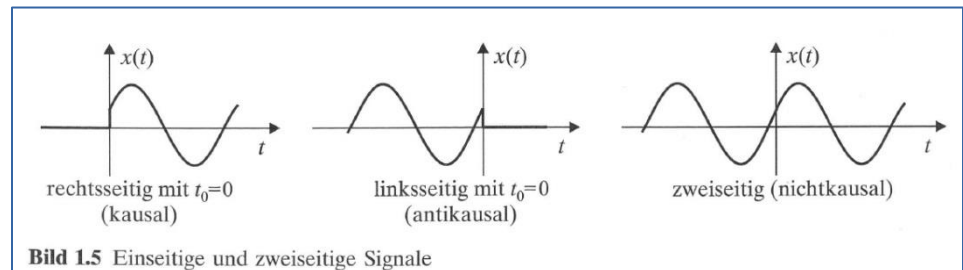
- Wenn Signal $x(t) = 0$ für $t < t_0$

◆ Antikausal, linksseitig

- Wenn Signal $x(t) = 0$ für $t > t_0$

◆ Akausal, zweiseitig, unbegrenzt

- Wenn Signal $x(t)$ für alle Zeitpunkte t gültige Funktionswerte ergibt



*1

Anmerkung: Der Begriff Kausalität kommt eigentlich aus der Systemtheorie, wird jedoch auch für Signale verwendet. Diese Begrifflichkeit wird uns daher in der Systemtheorie wieder begegnen.

In Verallgemeinerung dieser Vorstellung hat man für beliebige Signale definiert:

- die **Energie**

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.28)$$

- die **mittlere Leistung**

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt. \quad (2.29)$$

Ausgehend von diesen Definitionen bezeichnet man

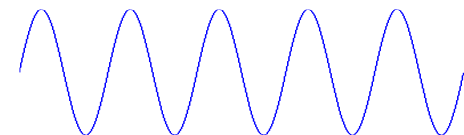
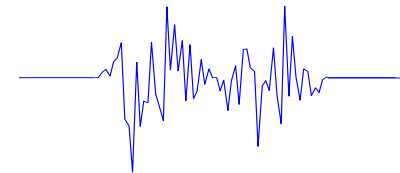
- ein Signal als **Energiesignal**, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\text{Energiesignal } x(t): E_x < M < \infty$$

- ein Signal als **Leistungssignal**, wenn gilt

$$\text{Leistungssignal } x(t): 0 < P_x < M < \infty$$

wobei M eine endliche positive Zahl ist.



Testsignale

◆ Rampe

◆ Stufe/Sprung

◆ Sinus

◆ Dirac-Impuls

◆ Dreieck

◆ Rechteck

◆ Dirac-Impulsfolge

◆ Si-Funktion

wichtige
Testfunktionen

Werden uns bei den Themen
Fourier-Transf., Abtastung und
Fensterung noch mehrmals begegnen

Sonstige Funktionen:

◆ Konstante

◆ Signum-Funktion

◆ Burst

◆ Chirp/Sweep

◆ Rauschen

◆ Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ ?, & t = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

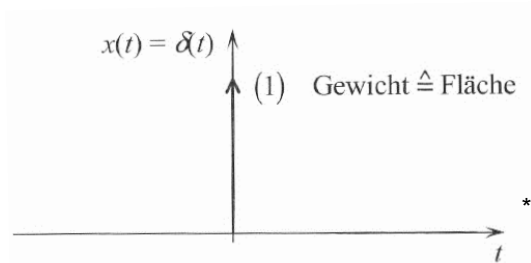
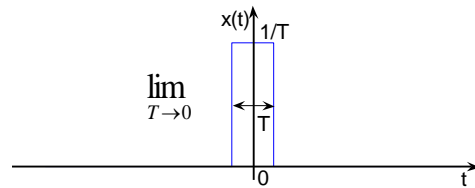


Bild 3.8 Symbolische Darstellung des Dirac-Impulses

Symbol: Pfeil an $t = 0$ mit H\u00f6he des Integralwertes!

◆ Dirac-Impulsfolge

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_p) \quad \text{mit } T_p \in \mathbb{R}^{>0}$$

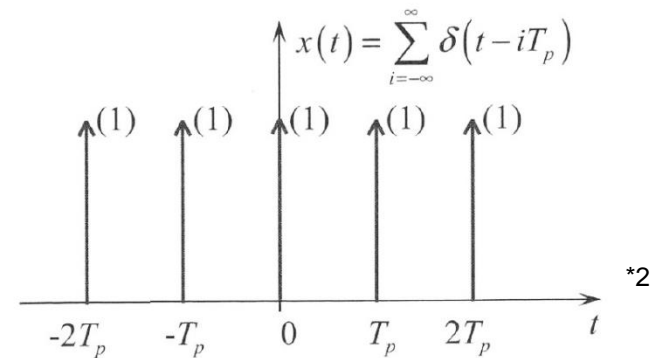


Bild 3.13 Dirac-Impulsfolge

◆ Stufe/Sprung

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad \lim_{T \rightarrow 0} \begin{array}{c} \text{Graph of } \sigma(t) \text{ with a ramp from } t=0 \text{ to } t=T \end{array}$$

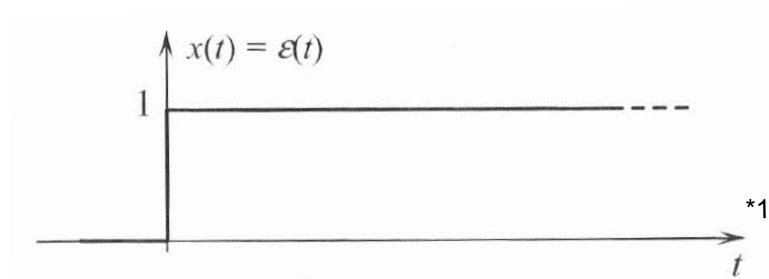


Bild 3.5 Einheitssprung

Heaviside Sprungfunktion, Einheitssprung

Signal „springt“ von 0 auf 1 zum Zeitpunkt t=0

Leistungssignal

◆ Rechteck

$$\text{rect}(t, T) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{T}{2} \\ 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t > \frac{T}{2} \end{cases} = \sigma(t + \frac{T}{2}) - \sigma(t - \frac{T}{2})$$

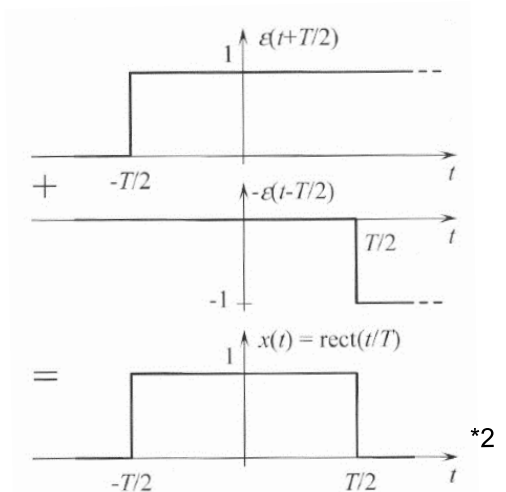


Bild 3.6 Rechteckfunktion

Energiesignal

realer Dirac – Impuls aus Rect:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\text{rect}(t, a)}{a} \right) = \delta(t)$$

◆ Rampe

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$r(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \sigma(\tau) \cdot d\tau \quad \text{bzw.} \quad \dot{r}(t) = \sigma(t)$$

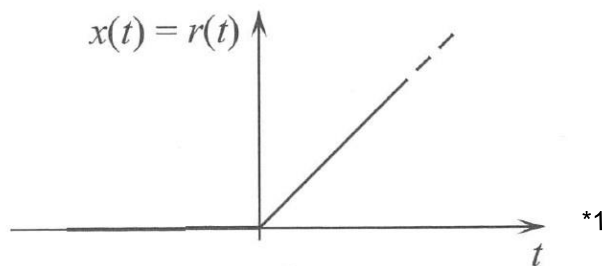


Bild 3.14 Rampenfunktion

weder Leistungssignal noch Energiesignal!

◆ Dreieck

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} \frac{T - |t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases}$$

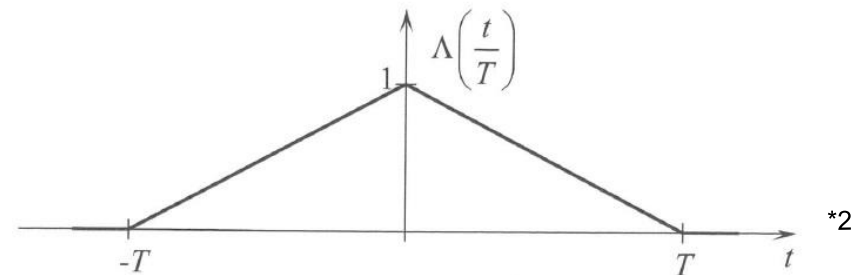


Bild 3.15 Dreieckfunktion

Energiesignal

◆ Sinus

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

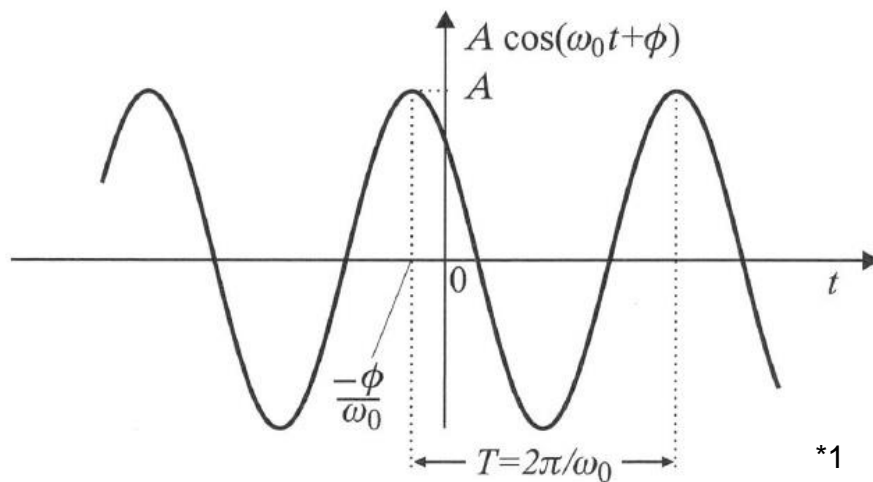


Bild 1.9 Beispiel eines Sinussignals

Leistungssignal

◆ Si-Funktion

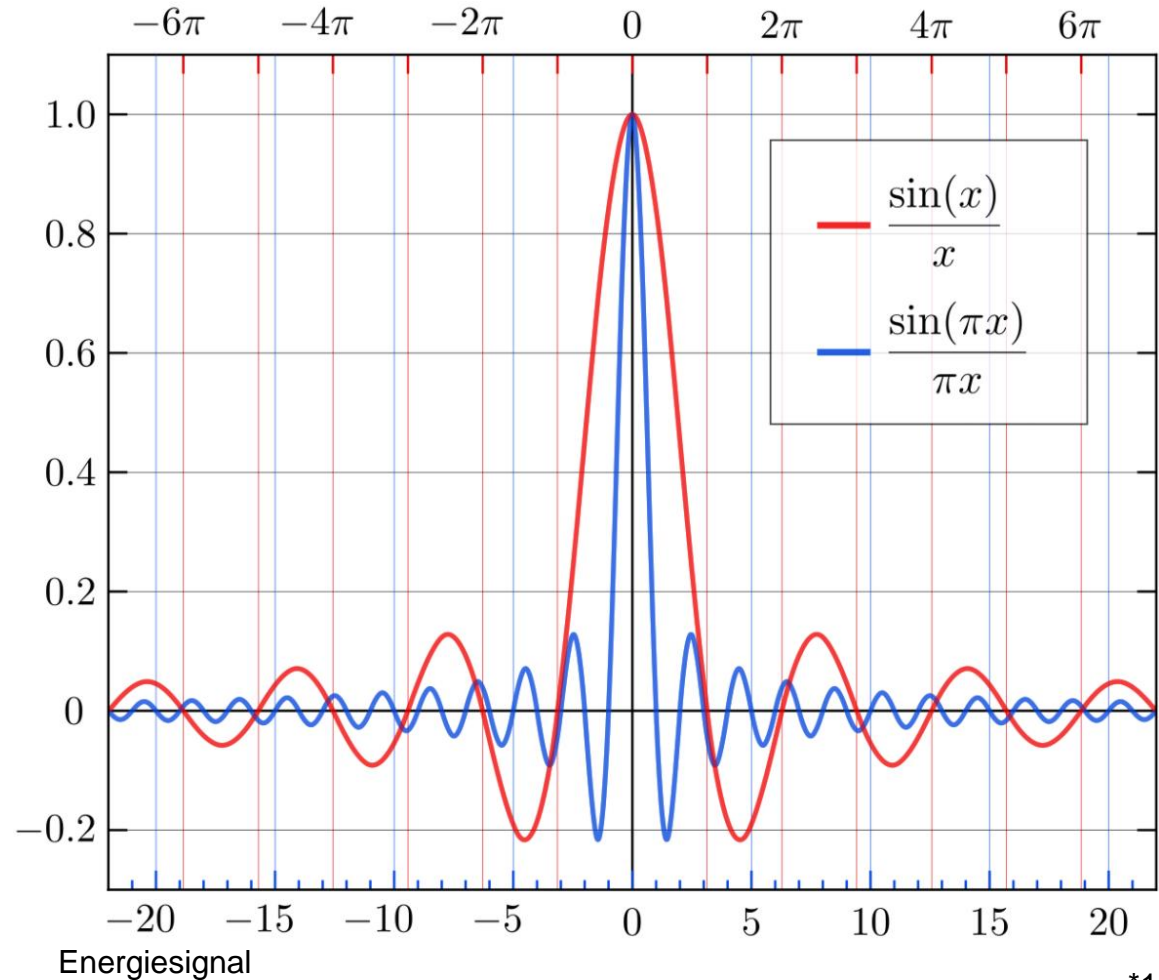
$$si(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Nullstellen bei $\pm n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

◆ Skalierter Sinuskardinalis:

$$sinc(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Nullstellen bei $\pm n$ mit $n \in \mathbb{Z}$



*1

Maße und Pegel

- ◆ Was versteht man unter einem „Signalpegel“?
- ◆ In welcher „Einheit“ werden diese angegeben?
- ◆ Warum wird eine logarithmische Darstellung verwendet? Welchen Vorteil hat diese?
- ◆ Welche abgeleiteten Formen des dB gibt es, was bedeuten diese und wo werden diese verwendet?

◆ Begriffsdefinitionen:

◆ „Maß“: Verhältnis der Wirkung zur Ursache bei logarithmischen Leistungsverhältnissen

z.B. Übertragungsmaß, Dämpfungsmaß, Verstärkungsmaß

angegeben in dB (**deziBel**)

dies ist eine einheitslose Größe (Verhältnis gleicher Größen)

◆ „Pegel“: Verhältnis der Wirkung zu einer standardisierten Bezugsgröße (Ursache) bei logarithmischen Leistungsverhältnissen

z.B. Leistungspegel, Spannungspegel, Leistungsflussdichtepegel, etc.

angegeben in z.B. dB(m), dB(μ V), dB(W/m²), dB(μ V/m), dB(A), etc.

diese Größen können als einheitsbehaftet angesehen werden

◆ Berechnung:

Bel: nach Alexander Graham Bell benannte Hilfsmaßeinheit
dB (Dezibel): von Bel abgeleitet für einfachere Handhabung (wie z.B. Dezimeter, Deziliter,...)

$$a = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ dB} = 10 \cdot \overset{\text{dezi}}{\lg}\left(\frac{U_1^2}{U_2^2} \cdot \frac{R_2}{R_1}\right) \text{ dB} \quad \text{mit} \quad P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}$$

$$a = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{U_1^2}{U_2^2} \cdot \frac{R_2}{R_1}\right) \text{ dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \text{ dB} - \underbrace{10 \cdot \lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \text{ dB}}_{= 0, \text{ mit } R_1 = R_2}$$

Leistungsproportionale Größen:

$$a = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ dB}$$

z.B. Leistung, Energie, Widerstand,
Rauschzahl und Leistungsflussdichte

Spannungsproportionale Größen:

$$a = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \text{ dB}$$

z.B. Spannung, Strom, elektr. und
mag. Feldstärke und Reflexionsfaktor

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log(x) \\ \log(x^y) &= y \cdot \log(x) \\ \log(xy) &= \log(x) + \log(y) \end{aligned}$$

Vorteile von Maßen und Pegeln:

- ◆ Bsp. 1: Eine Mobilfunkstation sendet beispielsweise, Antennengewinn eingerechnet, mit ca. 80W in Richtung Handy. Am Mobilfunkgerät kommen davon nur 0,000000002W an, das sind 0,0000000025% der Sendeleistung.

So sendet die erwähnte Basisstation beispielsweise mit +49dBm, das Handy empfängt -57dBm, der Pegelunterschied beträgt $-57\text{dBm} - 49\text{dBm} = -106\text{dB}$.

- ◆ Bsp. 2: Kaskadiert man 2 Verstärker mit 12- bzw. 16-facher Leistungsverstärkung, bekommt man eine Gesamtverstärkung von $12 * 16 = 192$.

Logarithmisch ausgedrückt sind das 10,8dB und 12 dB, zusammen also 22,8dB Verstärkung.

Vorteile von Maßen und Pegeln:

- ◆ Einfache Handhabung von Zahlen über viele Größenordnungen hinweg
- ◆ Einfache Berechnung der Gesamtwirkung von Systemketten

Pegel:

Wie bereits erwähnt sind Pegel logarithmische Größen bezogen auf eine standardisierte Bezugsgröße.

Hilfsmaßeinheit	Bezugsgröße
dBm	1mW
dBuV	1uV
dBA	1A
⋮	⋮

Dezibel vs. Neper:

Für die Berechnung von Größen in Dezibel wird der Logarithmus zur Basis 10 verwendet. Prinzipiell könnte jeder beliebige Logarithmus zur Berechnung solcher Verhältnissgrößen verwendet werden. Dessen bedient sich die Berechnung der Hilfsmaßeinheit Neper, welche den Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl e ($\sim 2,718$). Diese Einheit wird jedoch üblicherweise nicht mehr verwendet.

Umrechnung Dezibel \leftrightarrow Neper:

Eine Angabe in Neper lässt sich aufgrund der Beziehung

$$\ln\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \text{ Np} = 20 \cdot \lg\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \text{ dB}$$

in eine Angabe in Dezibel (dB) umrechnen, wobei

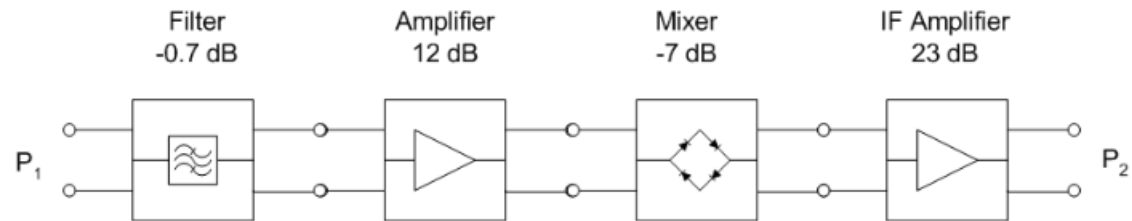
$$1 \text{ Np} = \frac{20}{\ln(10)} \text{ dB} \approx 8,686 \text{ dB}$$

$$1 \text{ dB} = \frac{\ln(10)}{20} \text{ Np} \approx 0,1151 \text{ Np}$$

Rechenbeispiele „Maße und Pegel“

◆ Maße:

◆ Bsp. 1:



Die Abbildung oben zeigt die Eingangsstufen eines Empfängers. Berechnen Sie die Gesamtverstärkung a aus den Verstärkungen a_1 bis a_4 der Teilsysteme.

◆ Pegel:

◆ Bsp. 1: Geben sie eine Leistungsflussdichte von $5 \frac{W}{m^2}$ als Pegel in $dB \left(\frac{W}{m^2} \right)$ an.

◆ Bsp. 2: Geben sie eine Spannung von $7 \mu V$ als Pegel in $dB(\mu V)$ an.

◆ Pegel:

◆ Bsp. 3: Welcher Leistung entspricht ein Leistungspegel von $-3 \text{ dB}(W)$?

◆ Bsp. 4: Welcher Spannung entspricht ein Spannungspegel von $120 \text{ dB}(\mu V)$?

◆ Pegel:

- ◆ Bsp. 5: Drei Signale P_1 , P_2 und P_3 mit 0 dBm, +3dBm und -6 dBm sollen addiert werden. Wie groß ist der Gesamtpegel?
-

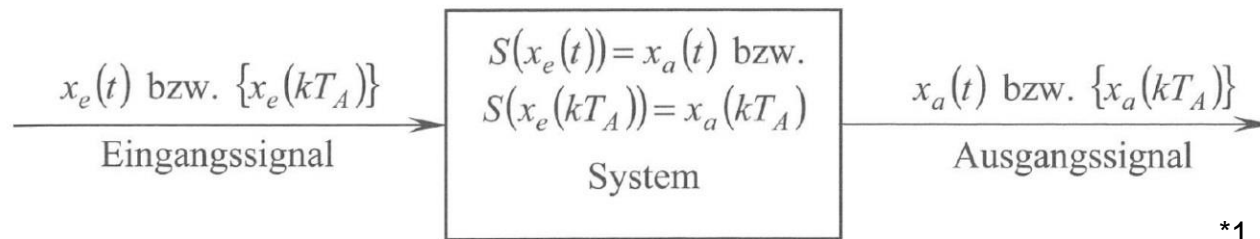
◆ Pegel:

- ◆ Bsp. 6: Der angezeigte Rauschpegel L_r eines Spektrumanalysators ohne angelegtes Signal beträgt $-70dBm$. Mit Signal steigt die Anzeige auf $L_{tot} = -65dBm$. Wie groß ist die Leistung des Signals in dBm ?
-

Definition und Klassifizierung von Systemen

„Ein System wird durch die Signale an seinen Eingängen angeregt. Diese Signale werden der Charakteristik des Systems entsprechend verarbeitet und die resultierenden Signale können an den Ausgängen des Systems abgegriffen werden.“

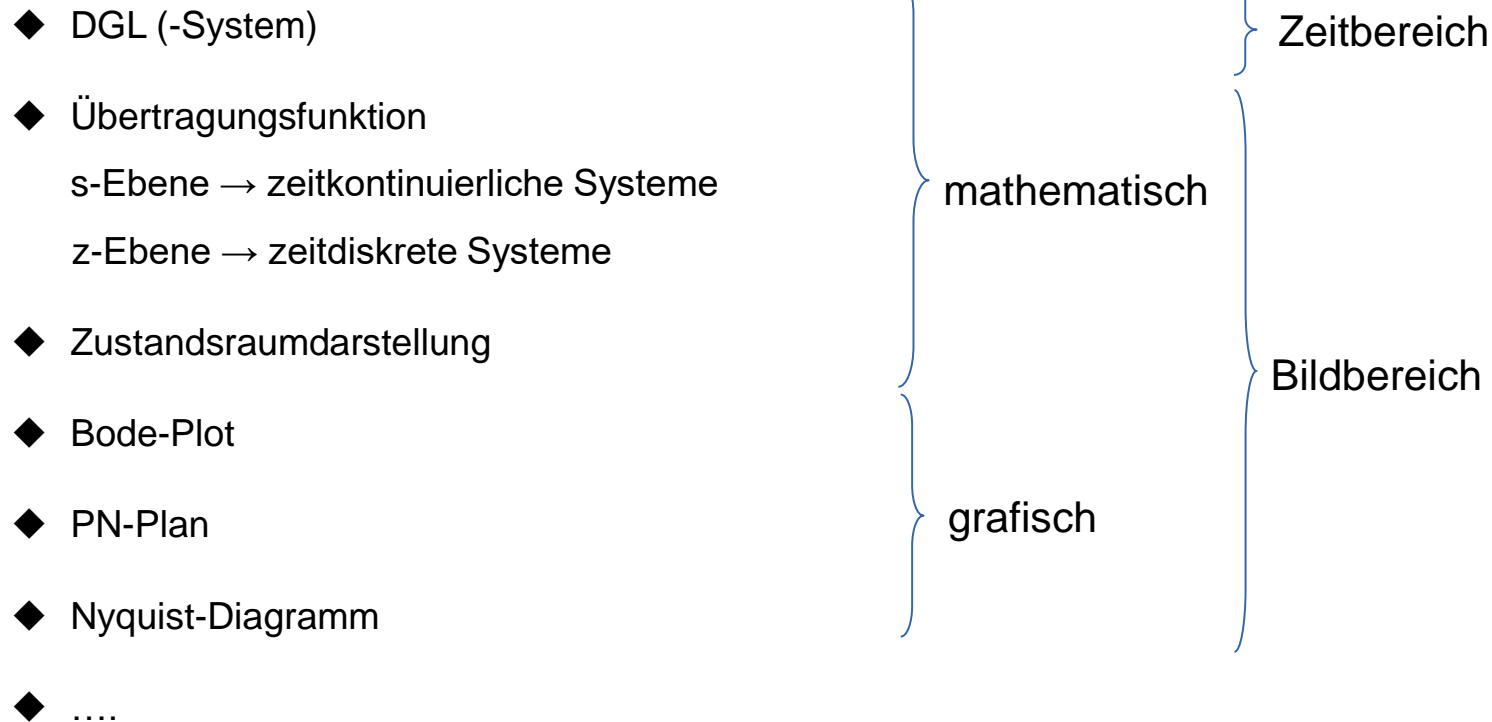
„Ein System ist das mathematische Modell eines Prozesses. Das mathematische Modell ordnet einem Eingangssignal ein Ausgangssignal zu.“



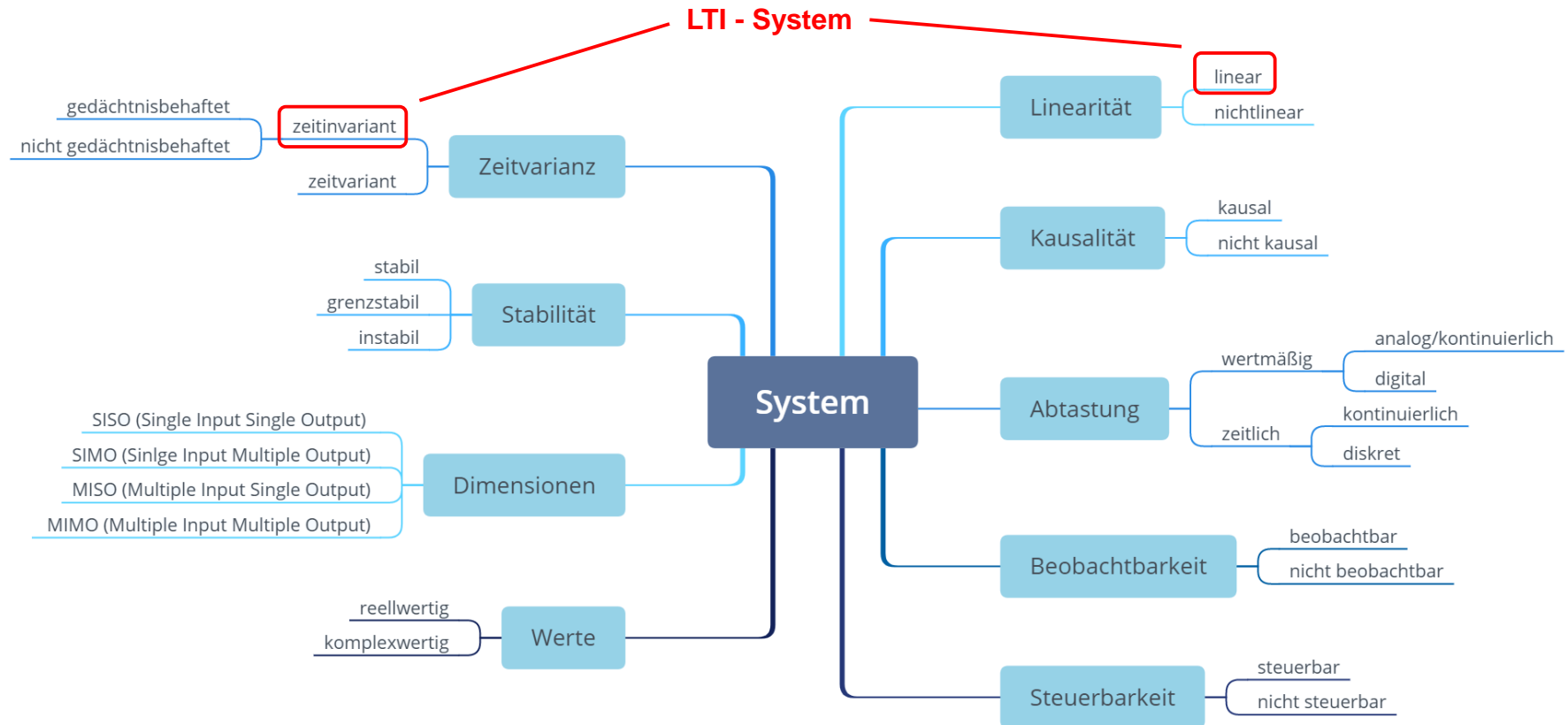
*1

Bild 8.2 Eingangssignal, System, Ausgangssignal

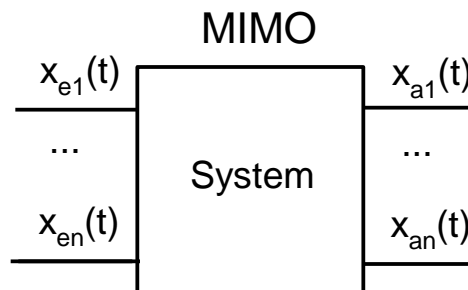
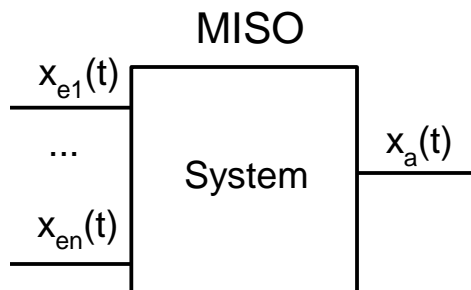
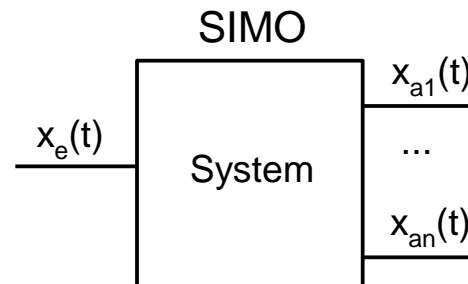
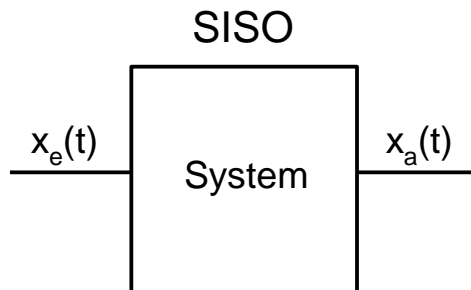
Wie kann ein System dargestellt oder modelliert werden?



Welche Beschreibung ist die Beste?

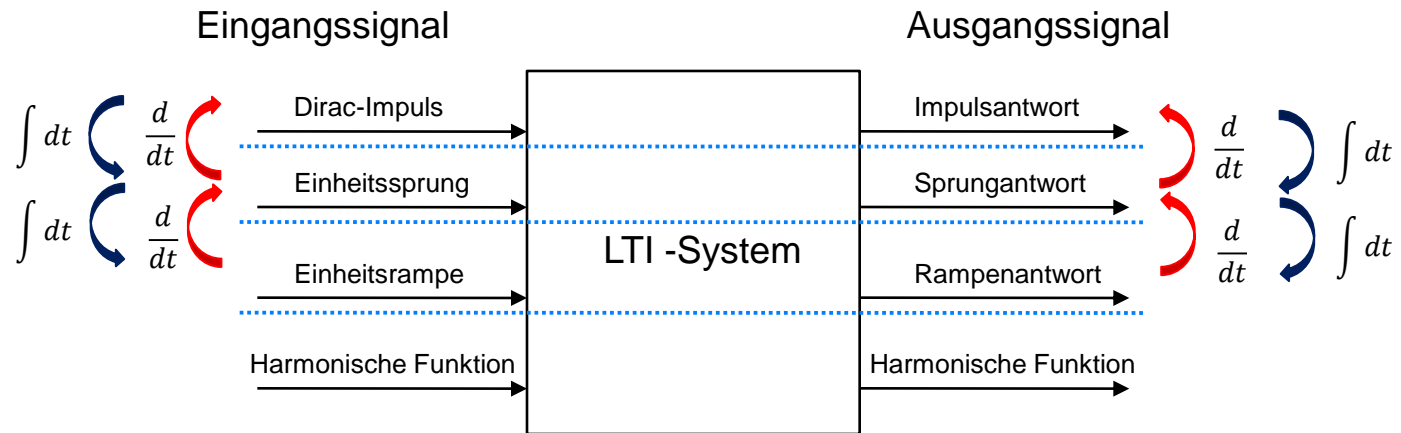


◆ Dimensionen



-
- ◆ Welche Systemantworten gibt es?
 - ◆ Welchen Bezug zueinander haben sie?
 - ◆ Wozu dienen sie?

 - ◆ Welche Testfunktionen gibt es?
 - ◆ Warum werden diese Funktionen auch Testfunktionen genannt?
 - ◆ Warum werden speziell diese Funktionen verwendet?
-

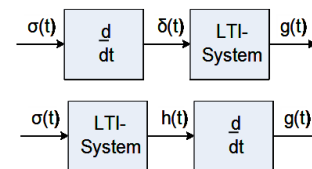


$$x(t) = \sigma(t) \rightarrow y(t) = h(t) \quad \text{Sprungantwort } h(t)$$

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = g(t) \quad \text{Impulsantwort } g(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t) \quad g(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt \quad h(t) = \int_{-\infty}^t g(t) \cdot dt$$



Mithilfe der sogenannten „Testfunktionen“ wird das dynamische und statische Verhalten eines Systems überprüft. Dies ermöglicht das System zu charakterisieren und mathematisch beschreiben zu können.

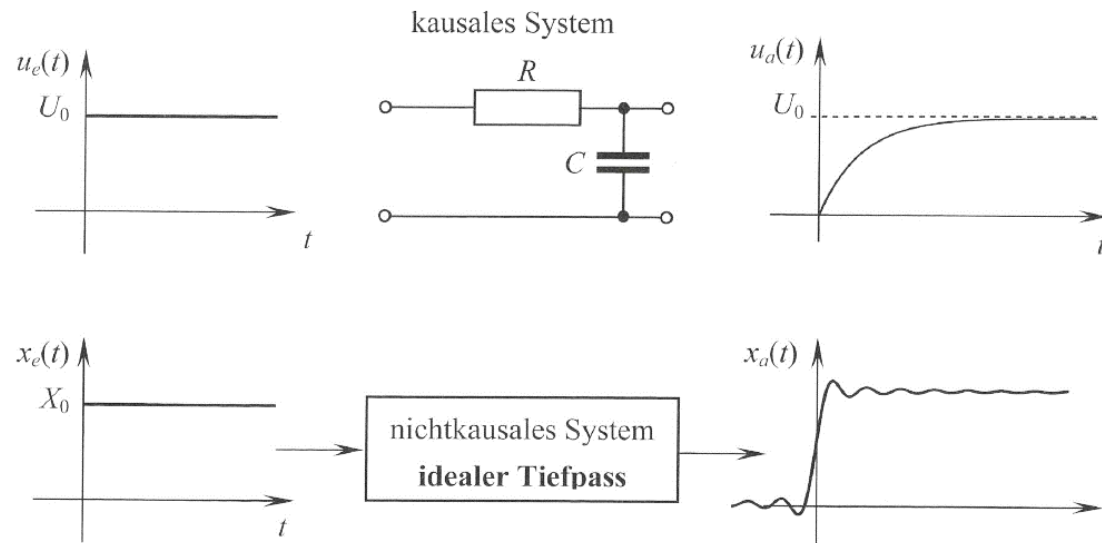
Unabhängig von der gewählten Testfunktion resultiert immer dieselbe Systembeschreibung.

◆ Kausalität

Kausales und nichtkausales System

Bei einem kausalen System liegt nur dann ein Ausgangssignal vor, wenn ein Eingangssignal anliegt. Praktisch realisierbare Systeme besitzen diese Eigenschaft. Systeme, die vor der Systemerregung durch das Eingangssignal eine Systemreaktion zeigen, heißen nicht-kausal.

*1



*2

Bild 9.6 Kausales und nichtkausales System

◆ Genauere Betrachtung der Eigenschaften eines LTI-Systems

◆ Linearität

Lineare und nichtlineare Systeme

Ein System wird als *linear* bezeichnet, wenn auf jede Linearkombination der Eingangssignale, z. B.

$$x_e(t) = k_1 x_{e1}(t) + k_2 x_{e2}(t)$$

das System mit der entsprechenden Linearkombination der Ausgangssignale reagiert.

$$x_a(t) = S(k_1 x_{e1}(t) + k_2 x_{e2}(t)) = k_1 S(x_{e1}(t)) + k_2 S(x_{e2}(t)) \quad (9.1)$$

Bei nichtlinearen Systemen gilt diese Beziehung nicht.

*1

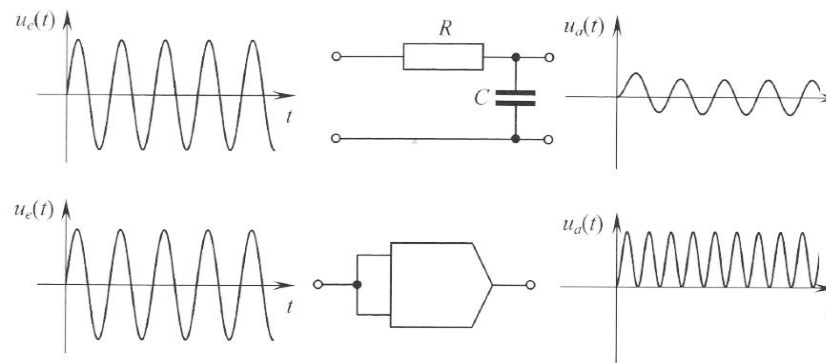


Bild 9.4 Reaktionen eines linearen und eines nichtlinearen Systems auf ein harmonisches Eingangssignal

*2

◆ Genauere Betrachtung der Eigenschaften eines LTI-Systems

◆ Zeitinvarianz

Zeitinvariante und zeitvariante Systeme

Ein System ist zeitinvariant, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn das System auf das Eingangssignal $x_e(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_a(t)$ reagiert, so muss das um t_0 später einsetzende Eingangssignal $x_e(t - t_0)$ das entsprechende zeitverschobene Ausgangssignal $x_a(t - t_0)$ zur Folge haben.

$$x_a(t) = S(x_e(t)) \quad \text{und} \quad x_a(t - t_0) = S(x_e(t - t_0)) \quad (9.6) \quad *1$$

Bei zeitvarianten Systemen gilt diese Beziehung nicht.

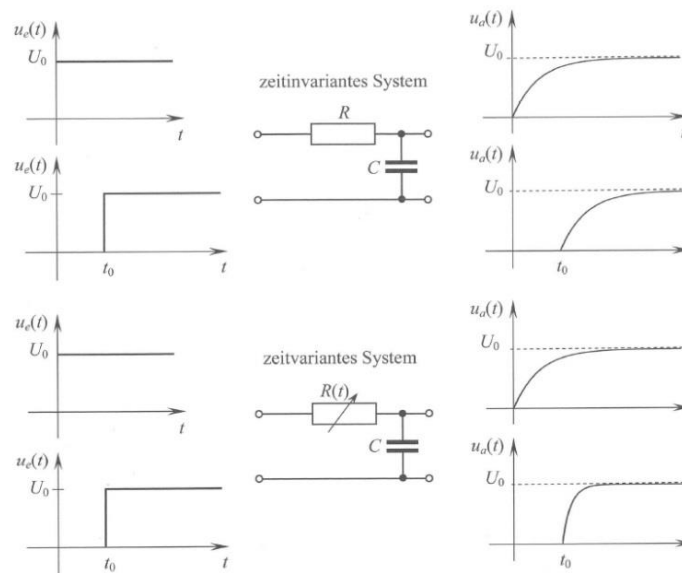


Bild 9.5 Zeitinvariantes und zeitvariantes System

*2

◆ Genauere Betrachtung der Eigenschaften eines LTI-Systems

Ein lineares zeitinvariantes System wird durch eine *lineare inhomogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten* beschrieben

$$a_n^{(n)} \dot{x}_a(t) + \dots + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = b_m^{(m)} \dot{x}_e(t) + \dots + b_1 \dot{x}_e(t) + b_0 x_e(t)$$

*1

Eine andere Repräsentation dieser Gleichung (sprich Transformation in einen anderen mathematischen Raum) möglich!

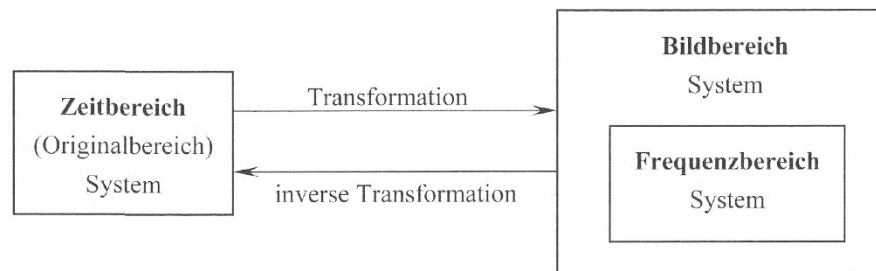


Bild 8.3 Bereiche der Systembeschreibung

*2

Stabilität von Systemen

- ◆ Was bedeutet „Stabilität“?
- ◆ Wozu muss ein System stabil sein? / Was bedeutet es wenn ein System nicht stabil ist?
- ◆ Welche Arten von Stabilität gibt es?
- ◆ Wie überprüft man die Stabilität eines Systems?
- ◆ Wo ist die Stabilitätsbetrachtung von großer Bedeutung?

◆ Stabilität

Stabile und instabile Systeme

Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal

$$|x_e(t)| \leq M_e < \infty \quad (9.7)$$

mit einem beschränkten Ausgangssignal

$$|x_a(t)| \leq M_a < \infty \quad (9.8)$$

reagiert. Dies wird als BIBO-stabil bezeichnet (**B**ounded-**I**ntput-**B**ounded-**O**utput). Anderenfalls ist das System instabil.

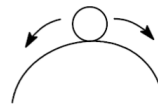
*1

Stabilitätsarten:



(asymptotically stable)

Ein System, das nach einer Anregung in seinen ursprünglichen Zustand von selbst zurückkehrt, heißt **asymptotisch Stabil**.



(instable)

Ein System, das nach einer Anregung nicht begrenzt bleibt, heißt **instabil**.



(marginally stable)

Ein System, das nach einer Anregung nicht in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, aber begrenzt bleibt, heißt **grenzstabil**.

◆ Stabilität

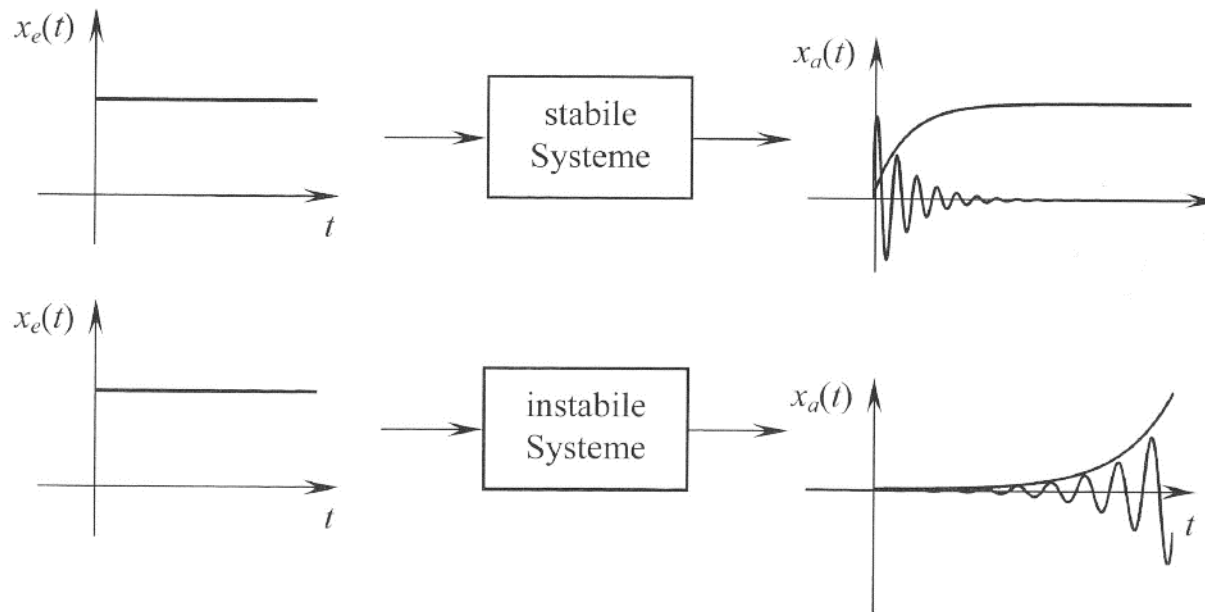


Bild 9.7 Stabile und instabile Systeme

*1

Ein reales, instabiles System schaukelt sich so lange auf bis es sich unter Umständen sogar selbst zerstört.

◆ Stabilitätskriterien / Stabilitätsüberprüfung

Ob ein System stabil ist oder nicht kann auf verschiedene Arten, sprich mit verschiedenen Rechenmethoden überprüft werden.

- Impulsantwort (Zeitbereich):

Die Beispiele aus Bild 10.32 lassen sich zu einem Stabilitätskriterium verallgemeinern. Bei einem stabilen System muss das Ausgangssignal für jedes beliebige beschränkte Eingangssignal ebenfalls beschränkt sein. Im Englischen spricht man kurz und prägnant vom BIBO-Kriterium (Bounded Input Bounded Output). Das Eingangssignal ist *beschränkt*, wenn die folgende Beziehung gültig ist.

$$|x_e(t)| < A < \infty, \forall t \quad \text{mit} \quad A > 0 \quad (10.155)$$

Aus der Ungleichung

$$|x_a(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t-\tau)g(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_e(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau \quad (10.156)$$

gewinnt man eine hinreichende Bedingung für die Stabilität eines LTI-Systems /12/. Mit der angegebenen Formulierung für die Beschränktheit des Eingangssignals gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_e(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} A |g(\tau)| d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau. \quad (10.157)$$

Damit das Ausgangssignal bei einem endlichem Wert für A endlich bleibt, darf das Integral nicht unendlich groß werden. Dies ist erfüllt, wenn die Impulsantwort *absolut integrierbar* ist.

Ein *stabiles* System hat eine *absolut integrierbare* Impulsantwort.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < B < \infty \quad \text{mit} \quad B > 0. \quad (10.158)$$

Für das Ausgangssignal gilt damit $|x_a(t)| < A \cdot B < \infty, \forall t$. Da A und B endlich sind, gilt dies auch für das Produkt $A \cdot B$ und das Ausgangssignal ist wie gefordert beschränkt.

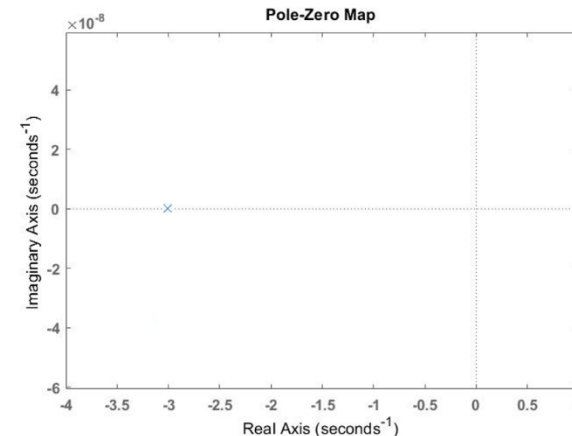
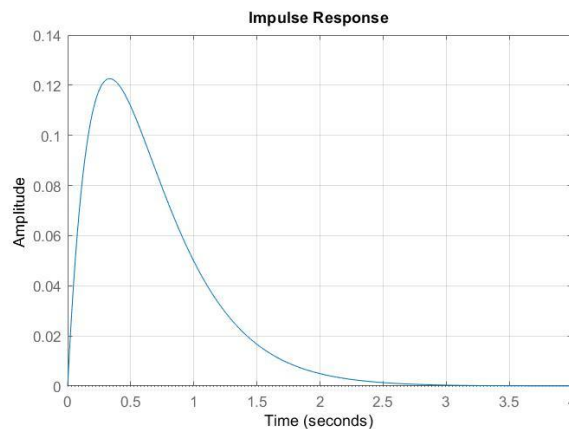
Bsp. Zeitbereich und Einführung Bildbereich

Wir nehmen folgende Impulsantwort als Lösung einer DGL an:

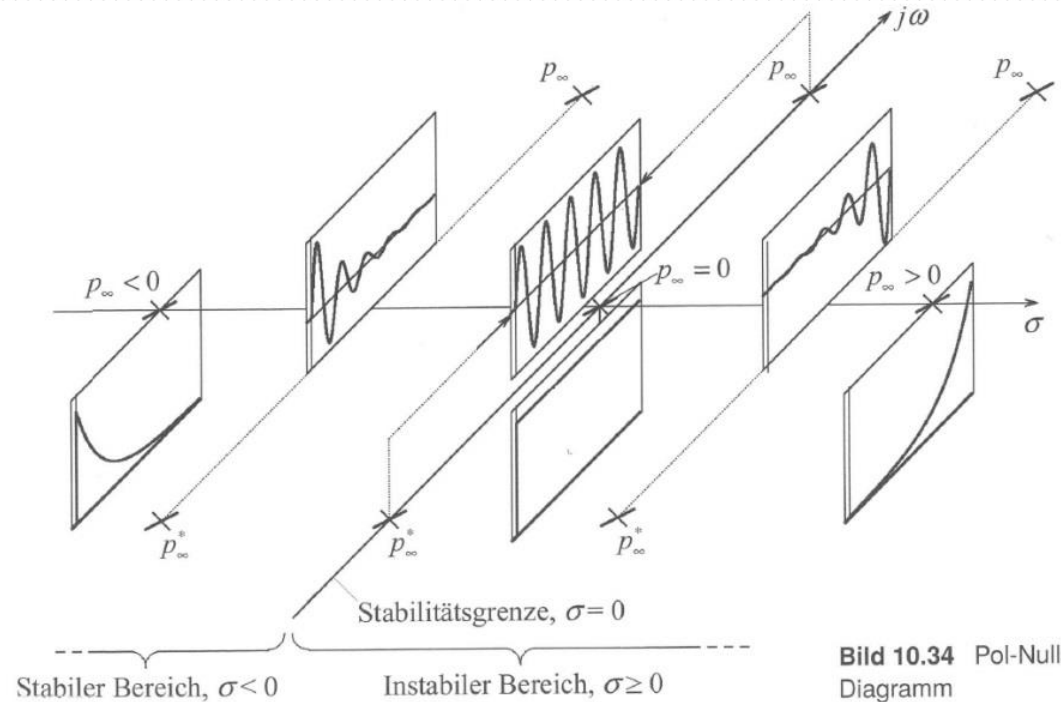
$$g(t) = e^{-3 \cdot t} \cdot t$$

Unter Anwendung der Fourier- bzw. Laplacetransformation erhalten wir folgende transformierte Funktion, welche der Übertragungsfunktion entspricht:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 3)^2}$$



- Pollage (Bildbereich):



Eigenschaft	Pole α_n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen negativen Realteil $\text{Re}(\alpha_n) < 0$
Grenzstabiles System	Es liegt mindestens ein einfacher Pol mit $\text{Re}(\alpha_n) = 0$ vor, alle anderen Pole α_n besitzen einen negativen Realteil $\text{Re}(\alpha_n) < 0$,
Instabiles System	Es existiert mindestens ein Pol α_n mit positivem Realteil $\text{Re}(\alpha_n) > 0$ oder ein mehrfacher Pol mit $\text{Re}(\alpha_n) = 0$

Rechenbeispiele „Stabilität“

◆ Stabilität:

◆ Bsp. 1: Überprüfen sie die Stabilität folgender Systeme:

a.
$$G_1(s) = \frac{5 \cdot s}{s^2 + 2,1 \cdot s + 0,2}$$

b.
$$G_2(s) = \frac{2 \cdot s}{3 \cdot s^2 - 1,6 \cdot s + 0,5}$$

◆ Stabilität:

- ◆ Bsp. 2: Überprüfen sie die Stabilität des in der Abbildung gezeigten Systems.

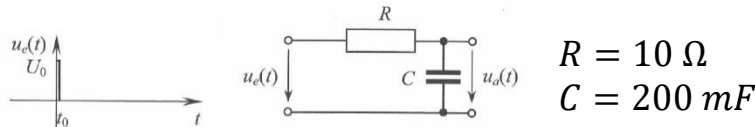


Bild 10.28 RC-Glied mit drei verschiedenen Eingangssignalen

- a. Überprüfen sie diese zuerst anhand der Impulsantwort:

$$g(t) = \sigma(t) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = R \cdot C$$

- b. Plotten sie mithilfe der angegebenen Übertragungsfunktion die Impulsantwort des Systems und überprüfen sie damit das Ergebnis von a.

$$G(s) = \frac{1}{RC \cdot s + 1}$$

- c. Plotten sie mithilfe der angegebenen Übertragungsfunktion den PN-Plan des Systems.
- d. Überprüfen sie die Stabilität anhand des PN-Plans

Befehl	Beschreibung
$G = \text{tf}([b_M \dots b_0], [a_N \dots a_0])$	Definition der Übertragungsfunktion über Zähler- und Nennerpolynom, Koeffizienten in absteigender Reihenfolge ihrer Potenz
<code>zero(G)</code>	Berechnung der Nullstellen der Übertragungsfunktion
<code>pole(G)</code>	Berechnung der Pole der Übertragungsfunktion
<code>pzmap(G)</code>	Darstellung der Pole und Nullstellen in der s-Ebene
<code>nyquist(G)</code>	Darstellung des Nyquist-Diagramms
<code>bode(G)</code>	Darstellung des Frequenzgangs des Systems
<code>impulse(G)</code>	Berechnung/Darstellung der Impulsantwort
<code>step(G)</code>	Berechnung/Darstellung der Sprungantwort
<code>linearSystemAnalyzer(G)</code>	Analyse des Systems mithilfe aller oben genannten Funktionen integriert in ein einziges Tool

◆ mögliche Lösungsansätze

```
%%Vorlesung 1 - Bsp 1) Überprüfung Stabilität
clear
clc
close all

disp('Vorlesung 1 - Bsp 1) Überprüfung Stabilität')
```

```
%% Definition G1(s) und G2(s)
disp('Definition G1(s) und G2(s)')

%Definition des gewünschten Systems mithilfe der Transferfunction-Funktion tf()
G1 = tf([5 0],[1 2.1 0.2])
G2 = tf([2 0],[3 -1.6 0.5])

%Polstellen berechnen
disp('Polstellen G1(s):')
pole(G1)
disp('Polstellen G1(s):')
pole(G2)

%Impulsantwort
linearSystemAnalyzer('pzmap',G1,G2);
```

```
%%Vorlesung 1 - Bsp 2) Überprüfung Stabilität RC-Glied
clear
clc
disp('Vorlesung 1 - Bsp 2) Überprüfung Stabilität RC-Glied')

%Definition der symbolischen Variablen
syms R C;
tau = R*C;
```

```
%Definition der symbolischen Funktionen
syms g(t) G(s) t;
g(t) = 1/tau * exp(-t/tau) * heaviside(t);

disp('g(t)=')
pretty(g(t));
```

```
%% a) Methode 1 - Impulsantwort (absolut integrierbar, endliches Ergebnis?)
R = 10;
C = 0.2;
tau = R*C;
```

```
disp('a) Methode 1 - Impulsantwort')
integral_g = int(abs(1/tau * exp(-t/tau) * heaviside(t)),t, 0, Inf)
disp('=> absolut integrierbar / endliches Ergebnis => stabil')
```

```
%% b) Plot Impulsantwort
disp('b) Plot Impulsantwort')
```

```
%Definition des gewünschten Systems mithilfe der Transferfunction-Funktion tf()
RC_Glied = tf([1],[tau 1])
```

```
%Impulsantwort
impzvar(RC_Glied);
```

```
%% c) PN-Plan
%Analyse mithilfe des "linearSystemAnalyzers"
disp('c) Plot PN-Plan')
linearSystemAnalyzer('pzmap',RC_Glied);
```

```
%% d) PN-Plan
disp('d) Eine Polstelle mit neg. Realteil => stabil; Im = 0 => nicht schwingfähig')
```