

---

**FH Vorarlberg**  
Integraltransformation

## **Signale und Systeme**

Foliensatz 4 – elementare/zusammengesetzte Übertragungsglieder, Systemmodellierung, Impulsantwort  
**LÖSUNGEN**

---

.....

Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung

Gegeben ist folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^3 u(t)}{dt^3} + \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\ddot{u}(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad u(0) = 1$$

- a) Transformieren Sie die Differentialgleichung händisch in den Laplace-Bereich und lösen Sie den Ausdruck nach  $U(s)$  auf.
  - b) Berechnen Sie die Polstellen der Laplace-Transformierten  $U(s)$  und stellen Sie die Polstellen in der komplexen Ebene dar. Handelt es sich bei dem Signal  $u(t)$  um ein schwingendes Signal? Erreicht das Signal einen stationären Endwert? Begründen Sie Ihre Antworten.
- .....

.....

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung händisch in den Laplace-Bereich und lösen Sie den Ausdruck nach  $U(s)$  auf.

Die gegebene Differentialgleichung kann allgemein in den Laplace-Bereich transformiert werden zu:

$$s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot u(0) - s \cdot \dot{u}(0) - \ddot{u}(0) + s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(0) - \dot{u}(0) + s \cdot U(s) - u(0) + U(s) = 0$$

Mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen ergibt sich die Gleichung

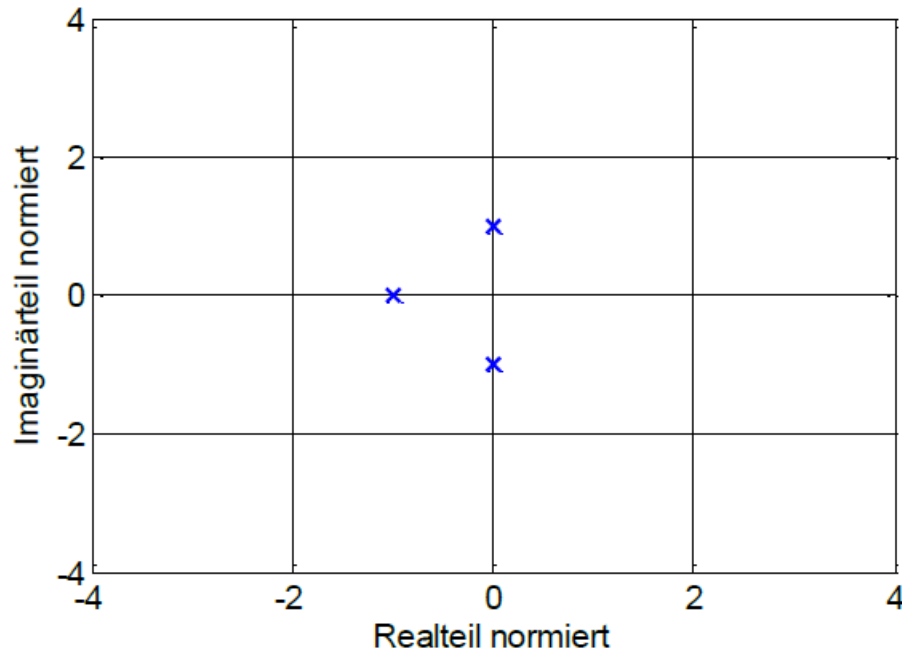
$$s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot 1 - 1 + s^2 \cdot U(s) - s \cdot 1 + s \cdot U(s) - 1 + U(s) = 0$$

Auflösen ergibt den Ausdruck für  $U(s)$  von

$$U(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

.....

b) Berechnen Sie die Pollagen der Laplace-Transformierten  $U(s)$  und stellen Sie die Pollagen in der komplexen Ebene dar. Handelt es sich bei dem Signal  $u(t)$  um ein schwingendes Signal? Erreicht das Signal einen stationären Endwert? Begründen Sie Ihre Antworten.



$$s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

$$s_1 = -1$$

$$s_{2,3} = \pm j$$

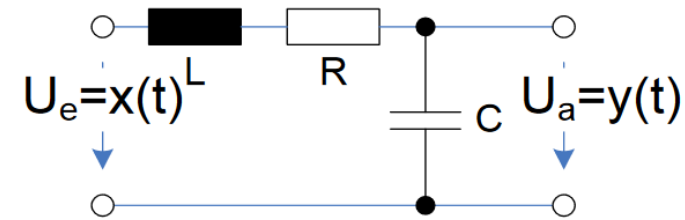
Der reelle Pol  $s_1$  gehört zu einer abklingenden Exponentialfunktion mit reellem Argument.

Die Pole  $s_{2,3} = \pm j$  sind konjugiert komplex zueinander. Sie repräsentieren eine harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude.

Da die harmonische Schwingung eine konstante Amplitude besitzt, besitzt das Signal keinen stationären Endwert.

$$u(t) = (e^{-t} + \sin(t)) \cdot \sigma(t)$$

Gegeben ist folgender Reihenschwingkreis



Dieser kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden

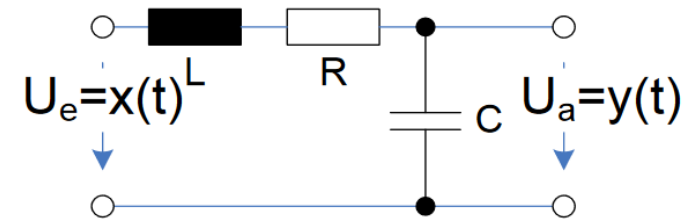
$$L \cdot C \cdot \ddot{u}_a(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u_e(t)$$

Gegeben sind folgende Anfangsbedingungen

$$\ddot{u}_a(0) = 0, \quad \dot{u}_a(0) = 0, \quad u_a(0) = 0$$

- Transformieren Sie die Systemgleichung in den Bildbereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$
- Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems
- Welche Bedingung muss für den Kriechfall, aperiodischen Grenzfall und den Schwingfall gelten.
- Plotten Sie für jeden dieser Fälle die Sprungantwort des jeweiligen Systems. (Matlab)

$$R = 100\Omega, \quad C = 1\mu F$$



- a) Transformieren Sie die Systemgleichung in den Bildbereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$  (händisch)

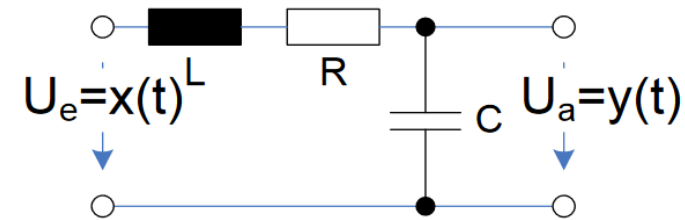
$$L \cdot C \cdot \ddot{u}_a(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u_e(t) \quad |\mathcal{L}\{\dots\}$$

Die Transformation ergibt

$$L \cdot C \cdot s^2 \cdot U_a(s) + R \cdot C \cdot s \cdot U_a(s) + U_a(s) = U_e(s)$$

$$U_a(s) \cdot [L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1] = U_e(s)$$

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$



b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems (händisch)

Nullstellen:

$$Z(s) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

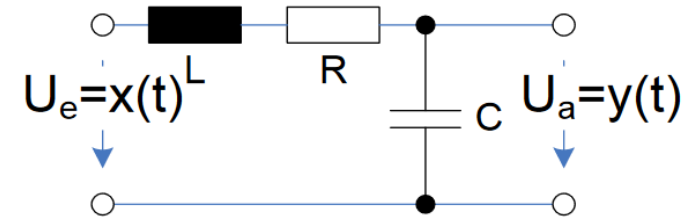
Polstellen:

$$N(s) = 0$$

$$L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1 = 0 \quad | : (L \cdot C)$$

$$s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$



- c) Welche Bedingung muss für den Kriechfall, aperiodischen Grenzfall und den Schwingfall gelten.

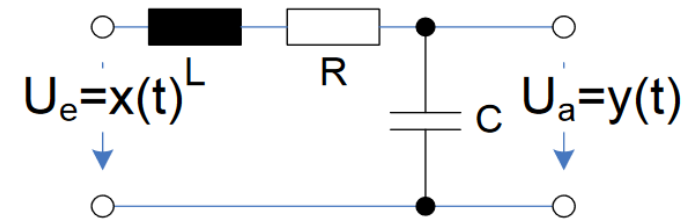
$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C} = 0$$
$$\frac{R^2 C}{4} = L$$

$$\frac{R^2 C}{4} > L \Rightarrow 2 \text{ reelle Pole} \Rightarrow \text{Kriechfall}$$

$$\frac{R^2 C}{4} = L \Rightarrow 1 \text{ Doppelpol} \Rightarrow \text{Aperiodischer Grenzfall}$$

$$\frac{R^2 C}{4} < L \Rightarrow 1 \text{ konjugiert komplexes Polpaar} \Rightarrow \text{Periodischer Fall}$$



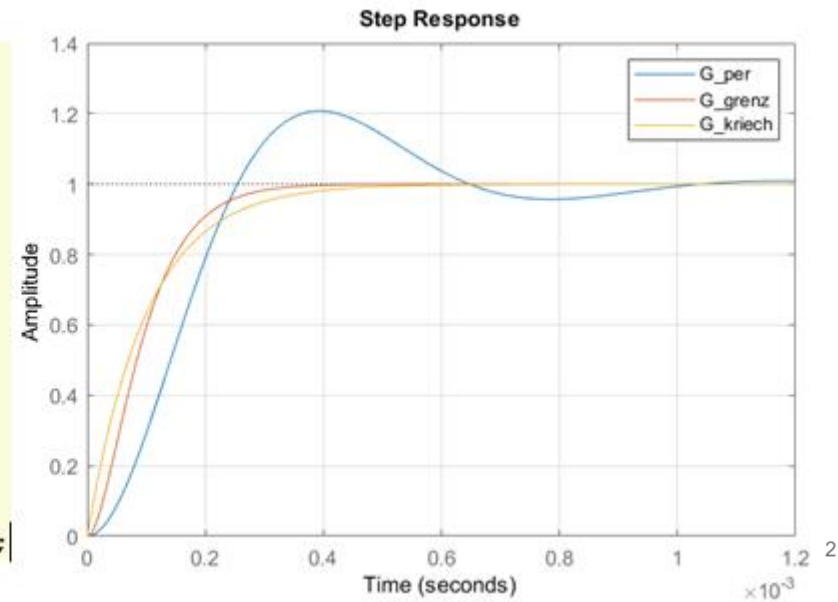


d) Plotten Sie für jeden dieser Fälle die Sprungantwort des jeweiligen Systems. (Matlab)

```
%% Beispiel 3 realer Reihenschwingkreis
%Definition der Variablen
R = 100;
C = 1e-6;
L1 = R^2*C/4 * 0.01;
L2 = R^2*C/4;
L3 = R^2*C/4 * 5;

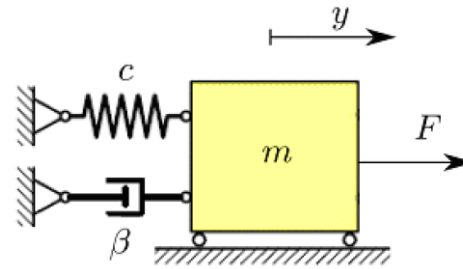
G_kriech = tf([1],[L1*C, R*C, 1]);
G_grenz = tf([1],[L2*C, R*C, 1]);
G_per = tf([1],[L3*C, R*C, 1]);

linearSystemAnalyzer(G_kriech, G_grenz, G_per);
```



Gegeben ist ein gedämpftes Feder-Masse-System

Lösungshinweise:  
... DGL / Übertragungsfunktion 2.Ordnung  
... Ähnlichkeit zu Bsp. mit R-L-C Glied gegeben  
... alle nötigen Anfangsbedingungen = 0



$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg} \\ c &= 0,1 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ \beta &= 0,7 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Die Feder wird durch eine lineare Kennlinie (Federkonstante  $c$ ) beschrieben. Die Position  $y$  der Masse  $m$  wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse wirkt zusätzlich eine äußere Kraft  $F$  und eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft (Dämpferkonstante  $\beta$ ). Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße  $u = F$  und der Ausgangsgröße  $y$  auf.

- Geben Sie die mathematische Beschreibung des Systems in Form einer gewöhnlichen Differenzialgleichung an.
- Transformieren Sie die Systemgleichung in den Bildbereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$ .