

---

**FH Vorarlberg**

Integraltransformation

## **Signale und Systeme**

Foliensatz 4 – elementare/zusammengesetzte Übertragungsglieder, Systemmodellierung, Impulsantwort

---

- 
- Elementare Übertragungsglieder
  - Erweiterte Übertragungsglieder
  - Systemmodellierung
  - Erweiterung Impulsantwort
-

---

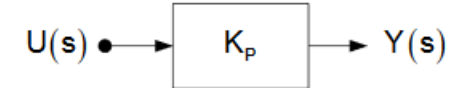
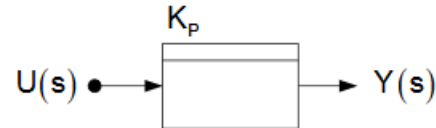
## Elementrare Übertragungsglieder

---

Strukturbild

Symbolische Darstellung

## Proportionalglied (P-Glied)



Beschreibung im Zeitbereich

$$y(t) = K_P \cdot u(t)$$

Sprungantwort

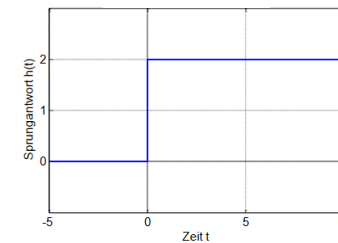
$$h(t) = K_P \cdot \sigma(t)$$

Impulsantwort

$$g(t) = K_P \cdot \delta(t)$$

Beschreibung im Laplace-Bereich

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_P$$

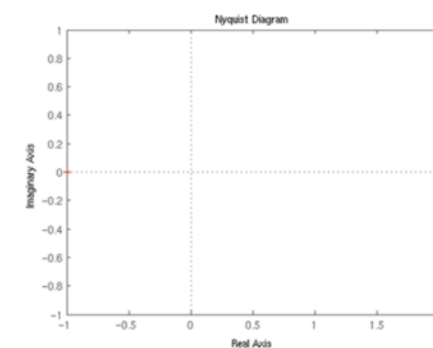
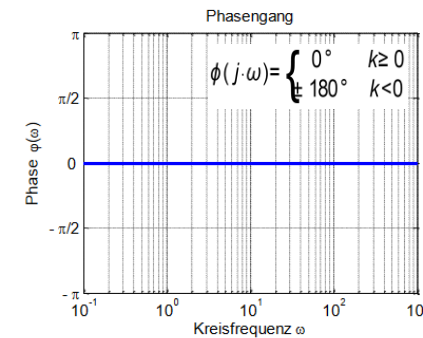
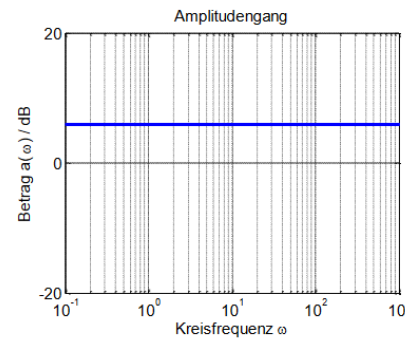


$$G(j\omega) = k_P$$

Frequenzgang

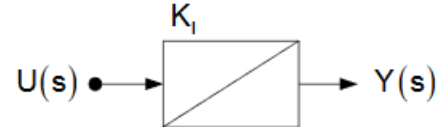
Nyquist-Diagramm

Beispiele: Spannungsteiler,  
idealer Sensor, ideale  
Verstärkung, etc.

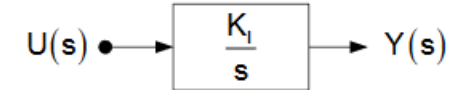


## Integrierglied (I-Glied)

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

$$y(t) = K_I \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = K_I \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0$$

Sprungantwort

$$h(t) = K_I \cdot \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau = K_I \cdot t \cdot \sigma(t)$$

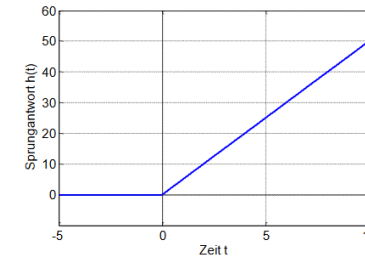
Impulsantwort

$$g(t) = K_I \cdot \sigma(t)$$

Beschreibung im Laplace-Bereich

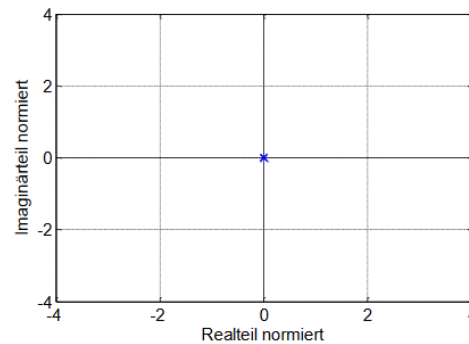
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_I \cdot s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot T_I}$$

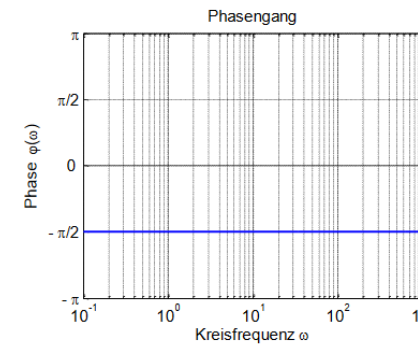
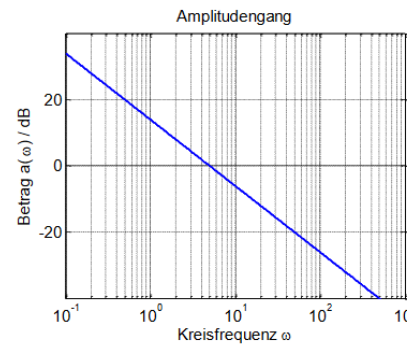


Beispiele: Aufladevorgang eines Kondensators, Beschleunigung einer Masse, etc.

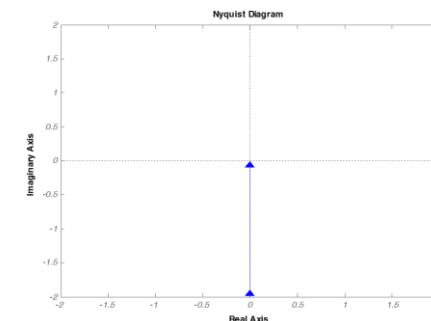
PN-Plan



Frequenzgang

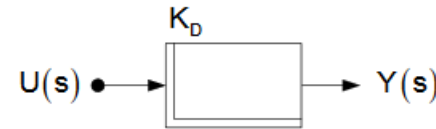


Nyquist-Diagramm

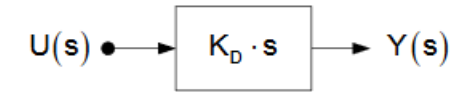


## Differenzierglied (D-Glied)

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

$$y(t) = K_D \cdot \frac{du}{dt}$$

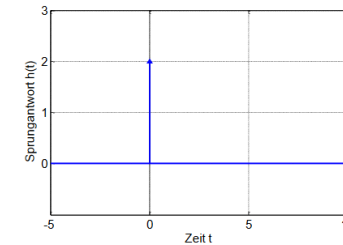
Beschreibung im Laplace-Bereich

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_D \cdot s = T_D \cdot s$$

$$G(j\omega) = j\omega \cdot T_D$$

Sprungantwort

$$h(t) = K_D \cdot \frac{d\sigma}{dt} = K_D \cdot \delta(t)$$

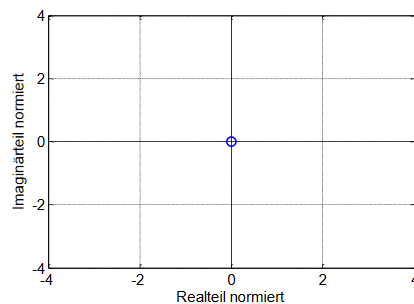


Impulsantwort

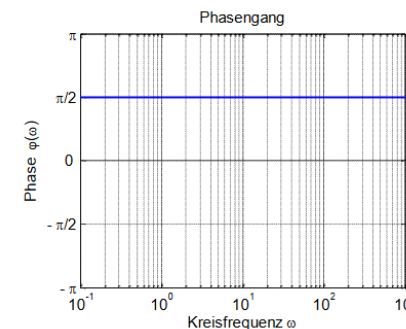
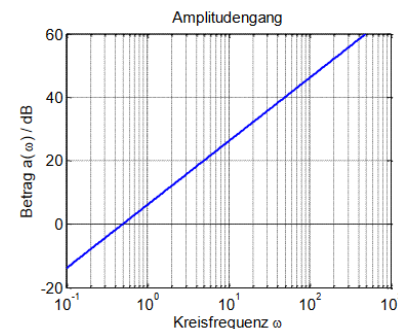
$$g(t) = K_D \cdot \delta(t)$$

Beispiele: ideales  
Differenzierglied mit OPV (in der  
Realität gibt es kein reines D-Glied)

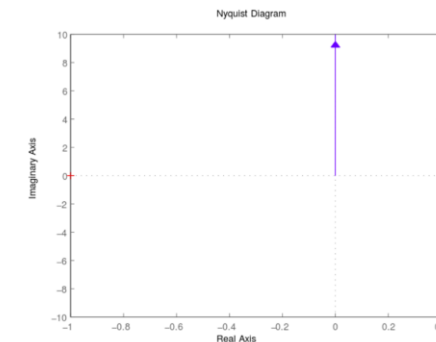
PN-Plan



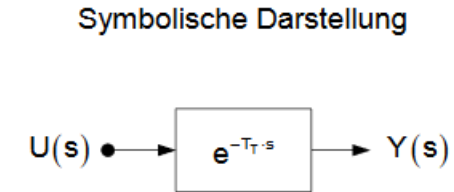
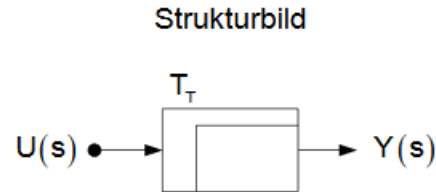
Frequenzgang



Nyquist-Diagramm



## Totzeitglied (T<sub>T</sub>-Glied)



Beschreibung im Zeitbereich

$$y(t) = u(t - T_T)$$

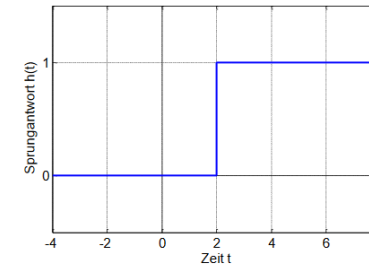
Sprungantwort

$$h(t) = \sigma(t - T_T)$$

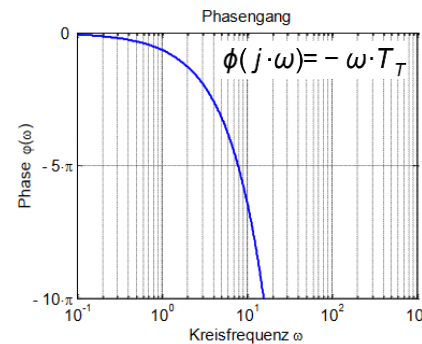
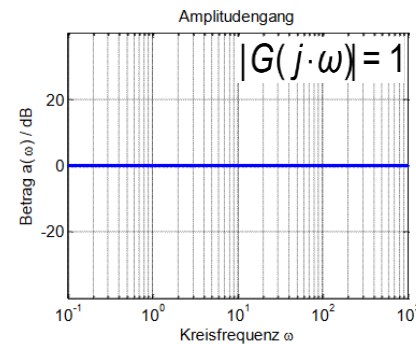
Beschreibung im Laplace-Bereich

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-s \cdot T_T}$$

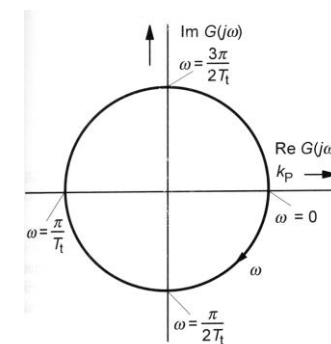
$$G(j \cdot \omega) = e^{-j \cdot \omega \cdot T_T}$$



Frequenzgang



Nyquist-Diagramm



Beispiele: Transportprozesse  
(Förderband), Rechenzeiten in digitaler  
Signalverarbeitung, Wandlungszeiten,  
realer A/D-Wandler

---

## Zusammengesetzte Übertragungsglieder

---



Die vorher betrachteten elementaren Übertragungsglieder können zu einer Vielfalt komplexerer Übertragungsglieder zusammengesetzt werden.

Nomenklatur: 
$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = K_P \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{du}{dt}$$

Bezeichnung PIDT <sub>N</sub> T <sub>T</sub> - Übertragungsglied	Bedeutung
P	Proportionales Eingangsverhalten vorhanden
I	Integrierendes Eingangsverhalten vorhanden
D	Differenzierendes Eingangsverhalten vorhanden
TN	Ordnung N des Übertragungsglieds
T <sub>T</sub>	Totzeit vorhanden

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + \boxed{a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}} = K_P \cdot u(t) + K_D \cdot \frac{du}{dt} \rightarrow \text{PDT2 - Glied}$$

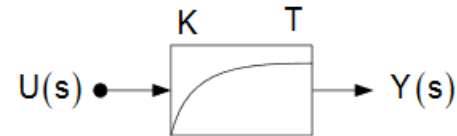
T2          P          D

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} = \begin{cases} K_P \cdot u(t) & \text{PT1 - Glied} \\ K_I \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau & \text{IT1 - Glied} \\ K_D \cdot \frac{du}{dt} & \text{DT1 - Glied} \end{cases}$$

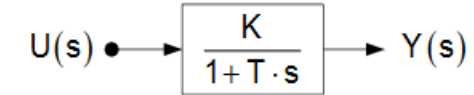
## PT1-Glied

proportionales Übertragungsverhalten  
mit Verzögerung 1. Ordnung

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

$$y(t) + T \frac{dy}{dt} = K \cdot u(t)$$

Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t)$$

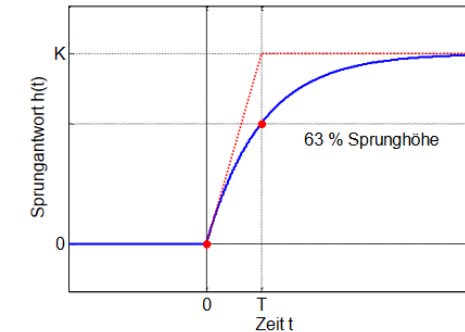
Beschreibung im Laplace-Bereich

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$$

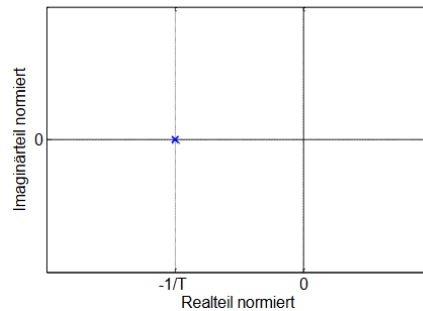
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T \cdot s}$$

$$\phi(j\omega) = -\arctan(\omega \cdot T)$$

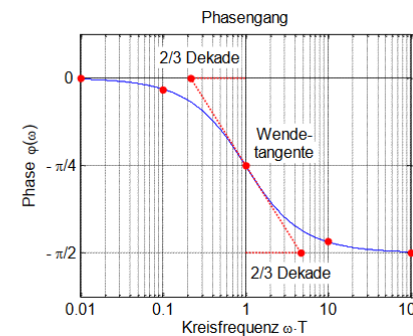
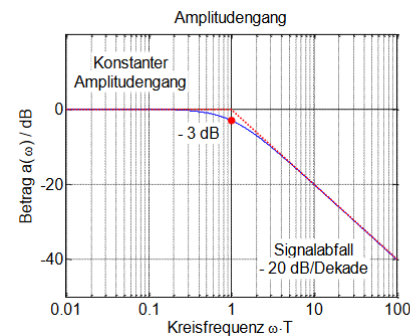
$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega \cdot T}$$



PN-Plan



Frequenzgang



Beispiele: RC-Glied,  
Anlaufverhalten von Motoren,  
Aufheiz- und Abkühlvorgänge und  
der Druckaufbau in Systemen mit  
kompressiblen Medien, etc.

### PT1-Glied – Tiefpass, z.B. RC-Glied

proportionales Übertragungsverhalten

mit Verzögerung 1. Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{1 + s \cdot T}$$

Grenzfrequenz  $f_g$  / Eckfrequenz (cut-off frequency  $f_c$ ) bei halber Signalleistung:

$$|G(j \cdot \omega_G)| = \frac{|G(j \cdot \omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = -3,0103 \text{ dB}$$

$$f_g = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

- Polstelle auf der negativen reellen Achse
- $f \ll f_g$ :  $|G(j\omega)| = 0 \text{ dB} = 1$   $\phi(j\omega) = 0^\circ$
- $f = f_g$ :  $|G(j\omega)| = -3 \text{ dB} = 0,71$   $\phi(j\omega) = -45^\circ$
- $f \gg f_g$ :  $|G(j\omega)| = -20 \text{ dB / Dekade}$   $\phi(j\omega) = -90^\circ$
- Knick im Bodediagramm mit 20 dB/Dekade
- $f_g$  indirekt proportional zu  $T$

## PT1-Glied – Tiefpass, z.B. RC-Glied

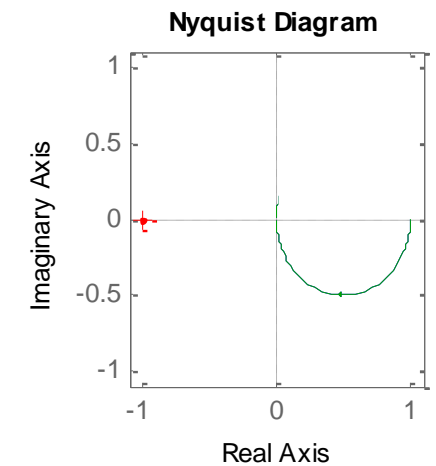
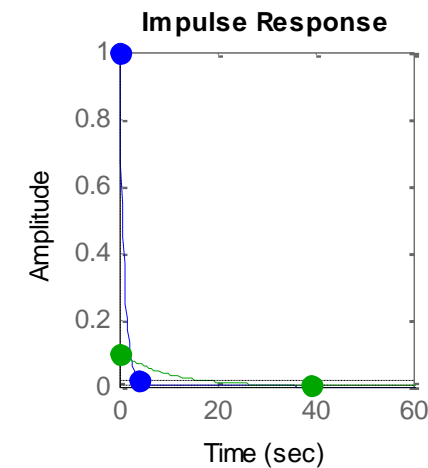
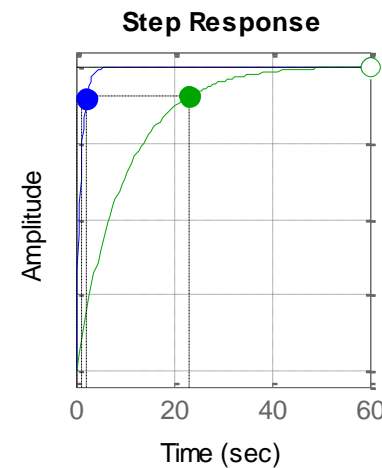
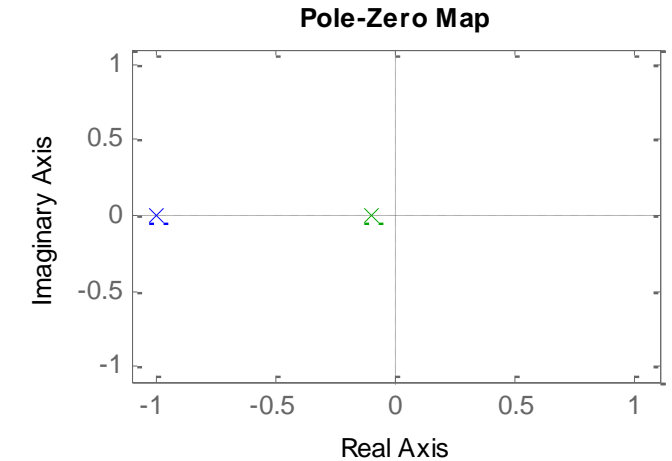
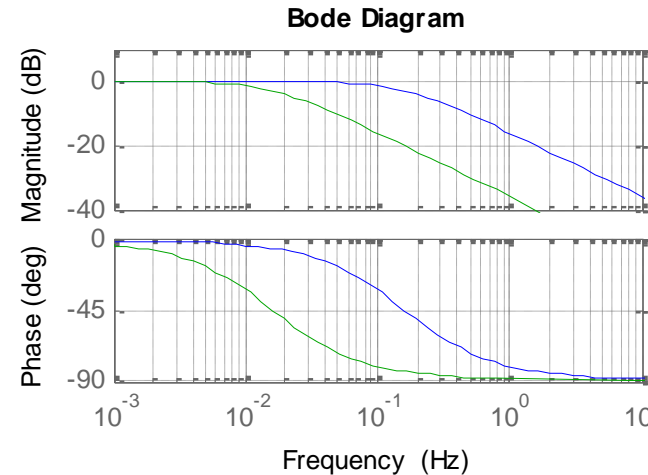
proportionales Übertragungsverhalten  
mit Verzögerung 1. Ordnung

### System mit großer Zeitkonstante:

- langsames Zeitverhalten
- kleine Amplitude der Impulsantwort
- geringe Knickfrequenz
- Pol nahe der imaginären Achse

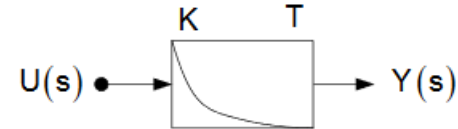
### System mit kleiner Zeitkonstante

- schnelles Zeitverhalten
- hoher Peak bei der Impulsantwort
- hohe Grenzfrequenz
- Pol weit entfernt von  $\sigma = 0$

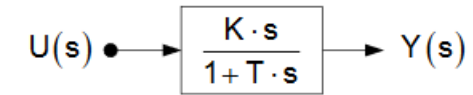


## DT1-Glied

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

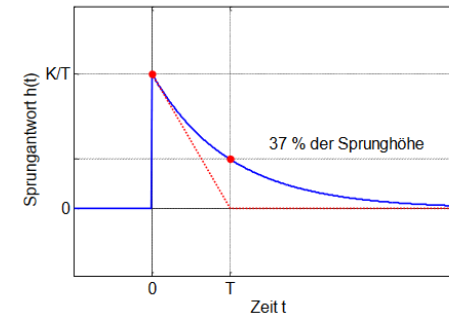
$$y(t) + T \cdot \frac{dy}{dt} = K \cdot \frac{du}{dt}$$

Beschreibung im Laplace-Bereich

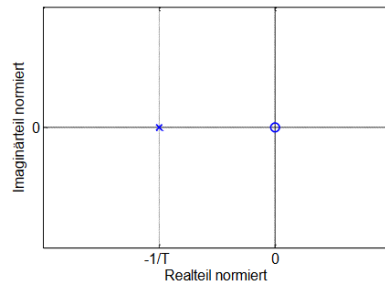
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot s}{1 + T \cdot s}$$

Sprungantwort

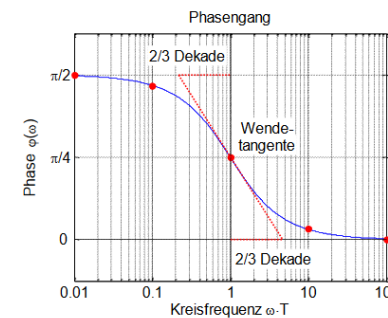
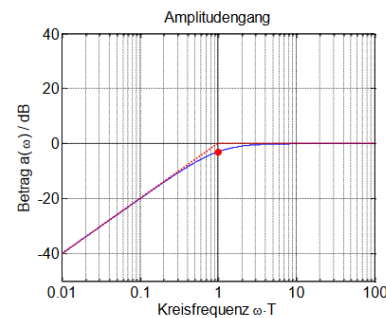
$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$$



PN-Plan



Frequenzgang



Beispiele: RC-Hochpass, Feder-Dämpfer-System, etc.

### DT1-Glied (Hochpass, z.B. CR-Glied)

$$G(s) = \frac{K \cdot s}{1 + T \cdot s}$$

Grenzfrequenz  $f_g$  / Eckfrequenz (cut-off frequency  $f_c$ ) bei halber Signalleistung:

$$|G(j \cdot \omega_G)| = \frac{|G(j \cdot \omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = -3,0103 \text{ dB}$$

$$f_g = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

- Polstelle auf der negativen reellen Achse + Nullstelle bei 0!
- $f \ll f_g$ :  $|G(j\omega)| = +20 \text{ dB / Dekade}$   $\phi(j\omega) = +90^\circ$
- $f = f_g$ :  $|G(j\omega)| = -3 \text{ dB} = 0,71$   $\phi(j\omega) = +45^\circ$
- $f \gg f_g$ :  $|G(j\omega)| = 0 \text{ dB} = 1$   $\phi(j\omega) = 0^\circ$
- Knick im Bodediagramm mit +20 dB/Dekade
- $f_g$  indirekt proportional zu T

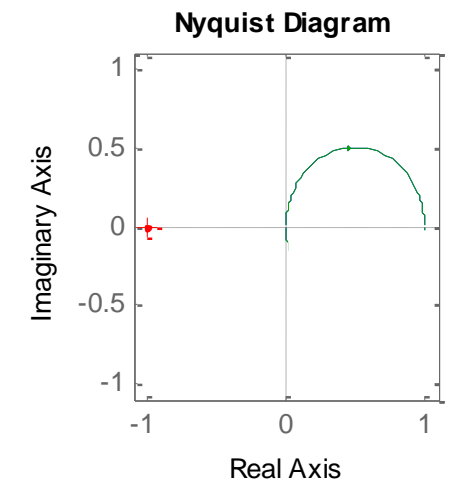
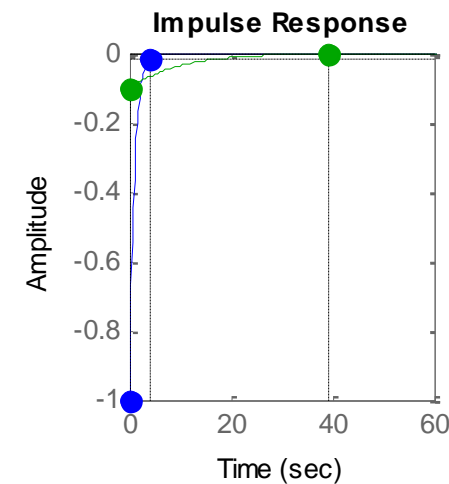
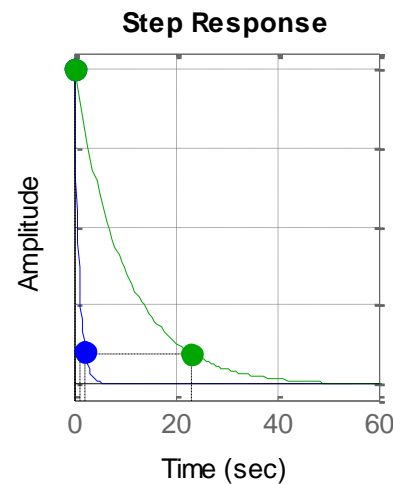
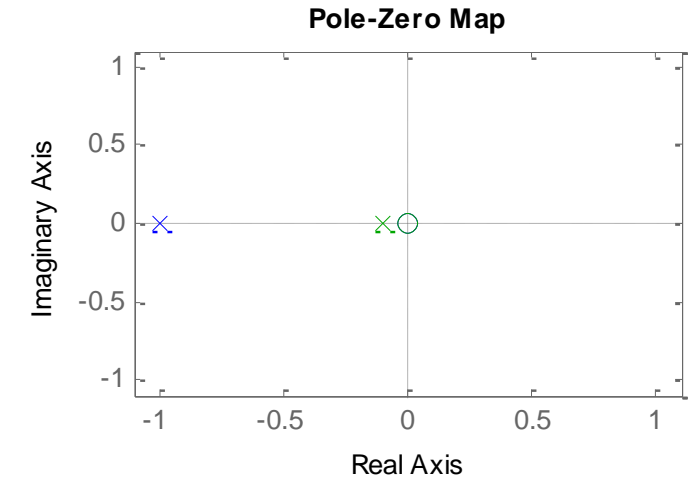
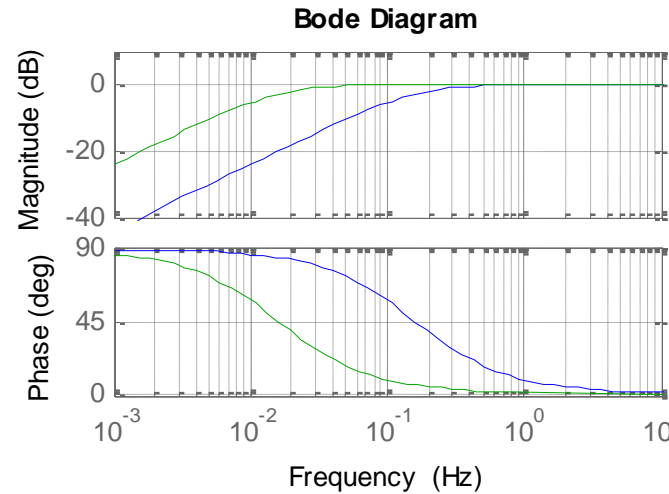
## DT1-Glied (Hochpass, z.B. CR-Glied)

### System mit großer Zeitkonstante:

- langsames Zeitverhalten
- kleine Amplitude der Impulsantwort
- geringe Knickfrequenz
- Pol nahe der imaginären Achse

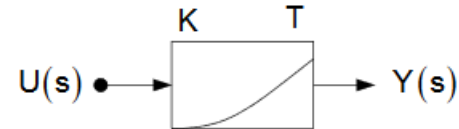
### System mit kleiner Zeitkonstante

- schnelles Zeitverhalten
- hoher Peak bei der Impulsantwort
- hohe Grenzfrequenz
- Pol weit entfernt von  $\sigma = 0$

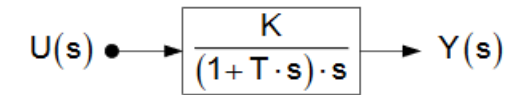


## IT1-Glied

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

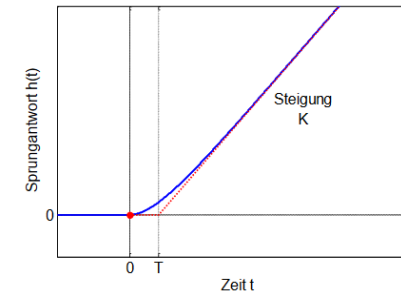
$$1 \cdot y(t) + T \cdot \frac{dy}{dt} = K \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Sprungantwort

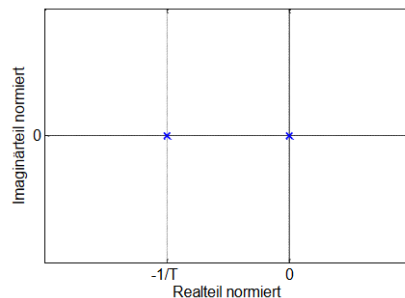
$$h(t) = \int_0^t K \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) d\tau = K \cdot t - K \cdot T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t)$$

Beschreibung im Laplace-Bereich

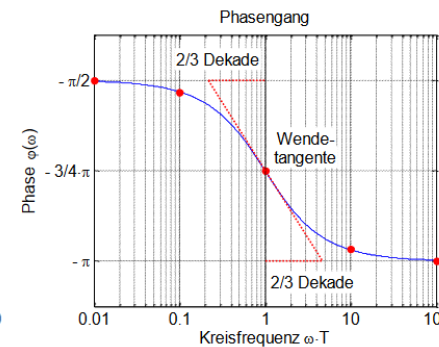
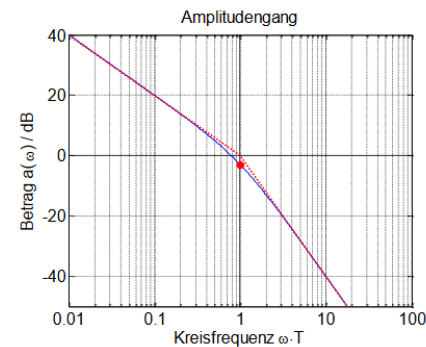
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s \cdot (1 + T \cdot s)}$$



PN-Plan



Frequenzgang



Beispiele: zurückgelegt Strecke  
eines Förderbandes mit  
anlaufendem Motor

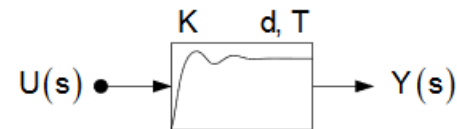


## PT2-Glied – Tiefpass, z.B. RC-Glied

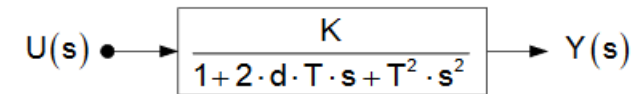
proportionales Übertragungsverhalten

mit Verzögerung 2. Ordnung

Strukturbild



Symbolische Darstellung



Beschreibung im Zeitbereich

$$1 \cdot y(t) + 2 \cdot d \cdot T \cdot \frac{dy}{dt} + T^2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = K \cdot x(t)$$

Sprungantwort

?

Impulsantwort

?

Beschreibung im Laplace-Bereich

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + 2 \cdot d \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2}$$

PN-Plan

?

Frequenzgang

?

Beispiele: Feder-Masse-Dämpfer-Systeme, RLC-Schwingkreise, **entkoppelte** Reihenschaltung zweier RC-Glieder

### PT2-Glied

Wo liegen die Pole dieses Systems?  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + 2 \cdot d \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2}$

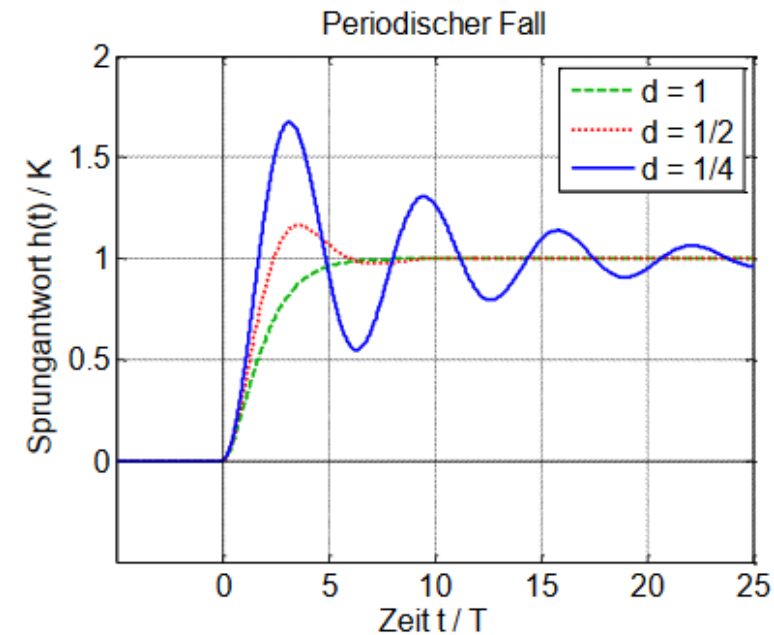
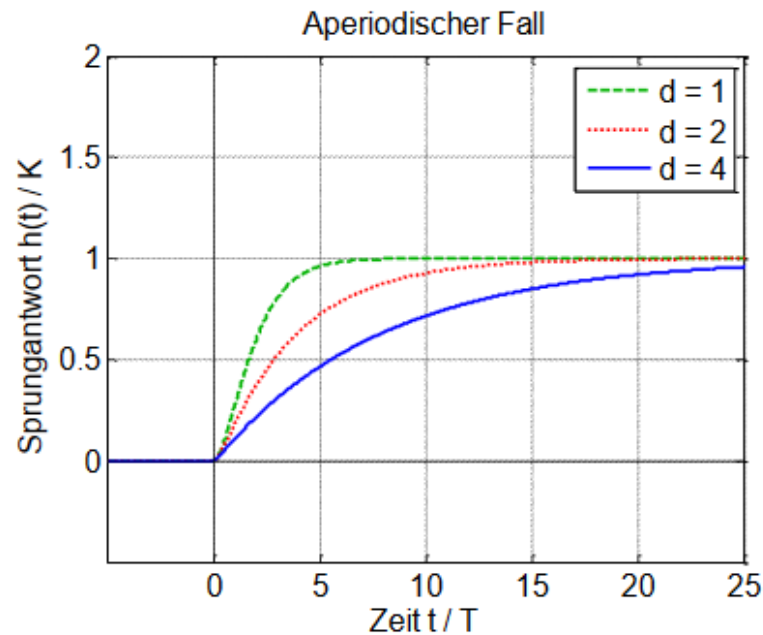
$$1 + 2 \cdot d \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2 = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm \sqrt{\frac{d^2}{T^2} - \frac{1}{T^2}} = -\frac{d}{T} \pm \frac{1}{T} \cdot \sqrt{d^2 - 1}$$

Fallunterscheidung:

Bezeichnung	Pollage	Dämpfungskonstante d
Aperiodischer Fall ( Kriechfall )	Einfache, reelle Pole $\alpha_1 \neq \alpha_2$	$d > 1$
Aperiodischer Grenzfall	Doppelte reelle Pole $\alpha_1 = \alpha_2$	$d = 1$
Periodischer Fall ( Schwingfall )	Konjugiert komplexe Polpaare $\alpha_1 = \alpha_2^*$	$d < 1$

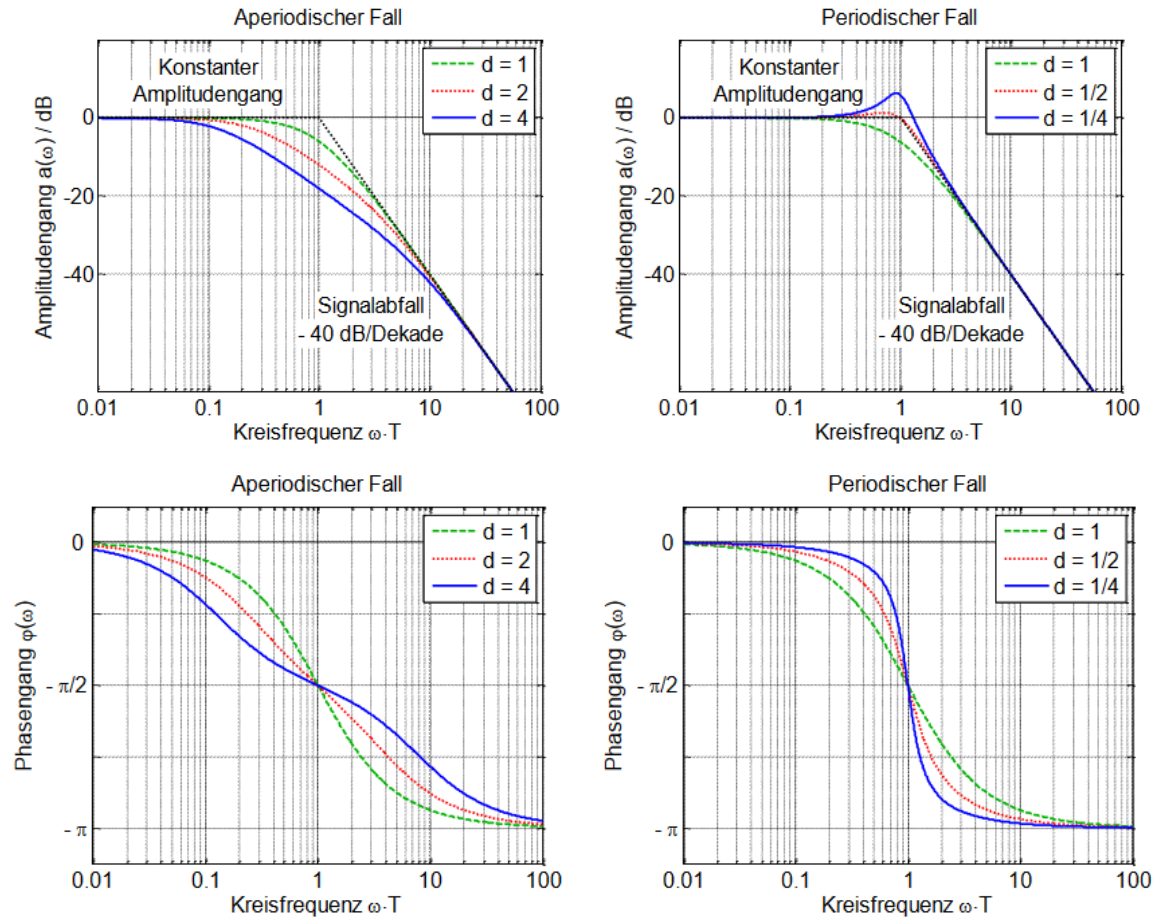
## PT2-Glied

Bezeichnung	Pollage	Dämpfungs-konstante d
Aperiodischer Fall ( Kriechfall )	Einfache, reelle Pole $\alpha_1 \neq \alpha_2$	$d > 1$
Aperiodischer Grenzfall	Doppelte reelle Pole $\alpha_1 = \alpha_2$	$d = 1$
Periodischer Fall ( Schwingfall )	Konjugiert komplexe Polpaare $\alpha_1 = \alpha_2^*$	$d < 1$



## PT2-Glied

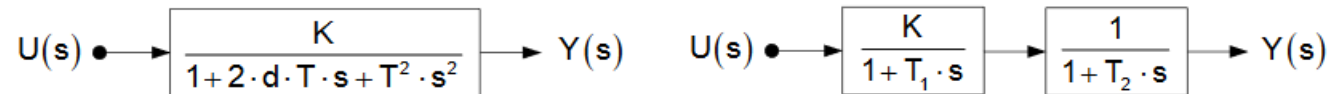
## Frequenzgang



### PT2- und Ptn-Glied:

Durch hintereinanderschalten von PT1-Gliedern können Glieder höherer Ordnung realisiert werden.

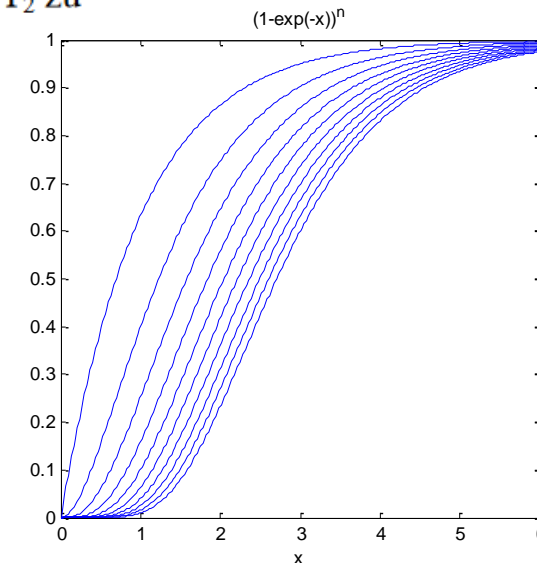
z.B. kann ein PT2-Glied mit  $d \geq 1$  durch 2 in Serie geschaltete PT1-Glieder realisiert werden.



Für den aperiodischen Fall ( $d > 1$ ) ergeben sich die Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  zu

$$T_{1,2} = \frac{T}{d \pm \sqrt{d^2 - 1}}$$

**ACHTUNG:** Dies gilt nur wenn die Systeme rückwirkungsfrei/entkoppelt sind!



## Allpass 1.Ordnung (z.B. Totzeit-Glied)

Beschreibung im Zeitbereich

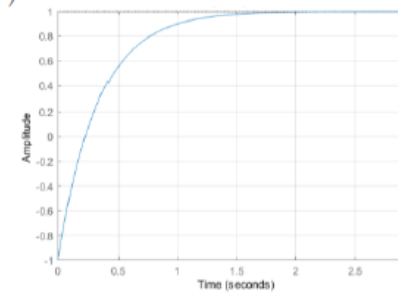
$$\dot{y}(t) + a \cdot y(t) = -\dot{x}(t) + a \cdot x(t)$$

Beschreibung im Laplace-Bereich

$$G(s) = \frac{-s+a}{s+a}$$

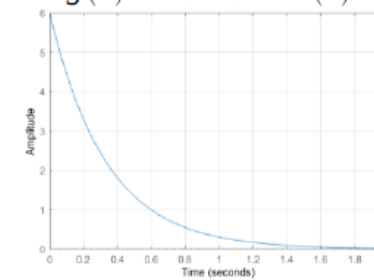
$$G(j \cdot \omega) = \frac{1 - j \cdot \omega \cdot T_a}{1 + j \cdot \omega \cdot T_a}$$

Sprungantwort

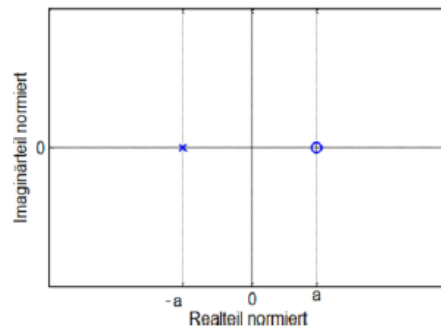


Impulsantwort

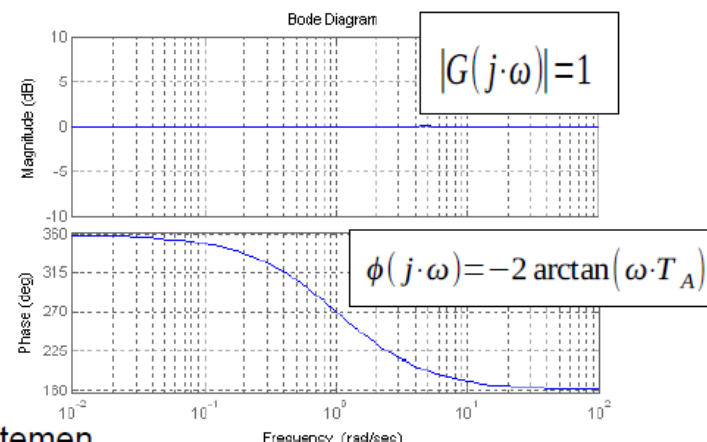
$$g(t) = 2 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t} - \delta(t)$$



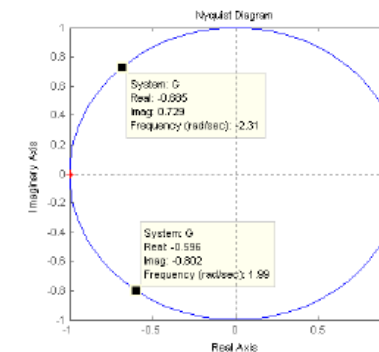
PN-Plan



Frequenzgang



Nyquist-Diagramm



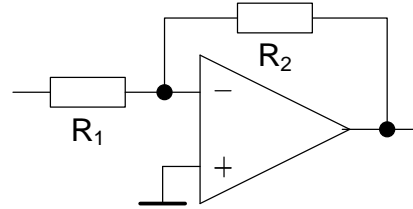
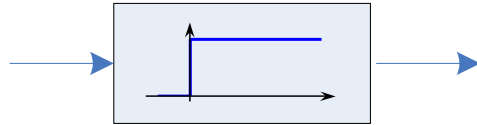
Beispiele: Modellierung von Totzeitsystemen

---

## **Zusammengesetzte Übertragungsglieder als Regler (OPV-Realisierung)**

---

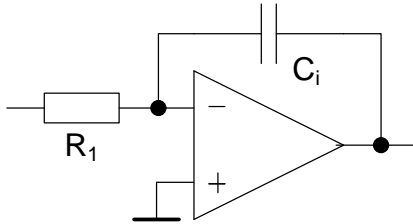
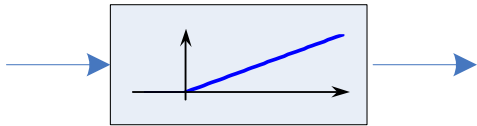
P



$$G(s) = k_p$$

$$k_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

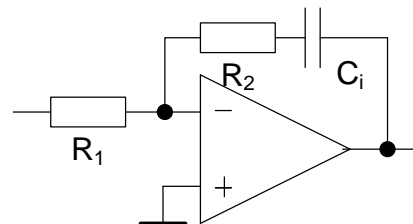
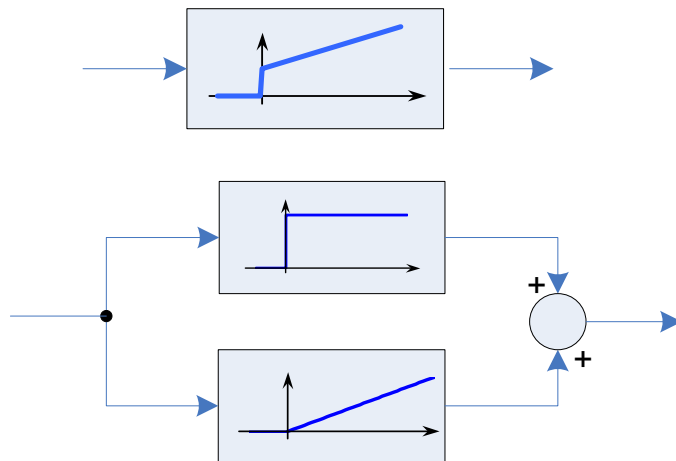
I



$$G(s) = \frac{k_I}{s}$$

$$k_I = -\frac{1}{R_1 \cdot C_I} = \frac{1}{T_N}$$

PI

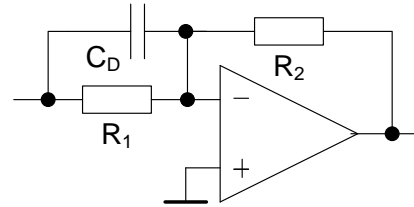
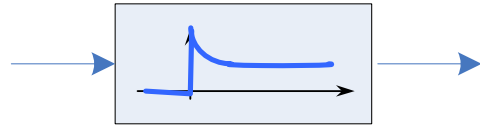


$$G(s) = k_p + \frac{k_p}{T_N \cdot s}$$

$$G(s) = \frac{k_{PI}}{s} \cdot (1 + T_N \cdot s)$$



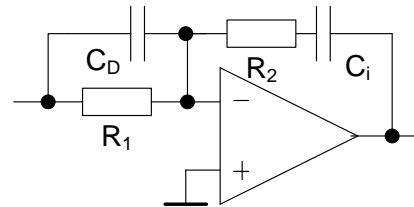
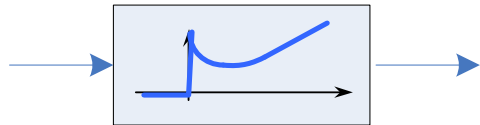
PD



$$G(s) = k_p + T_V \cdot s$$

$$G(s) = k_p \cdot \frac{T_V \cdot s + 1}{T \cdot s + 1} \quad T_V \gg T$$

PID



$$G(s) = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_N \cdot s} + T_V \cdot s \right)$$

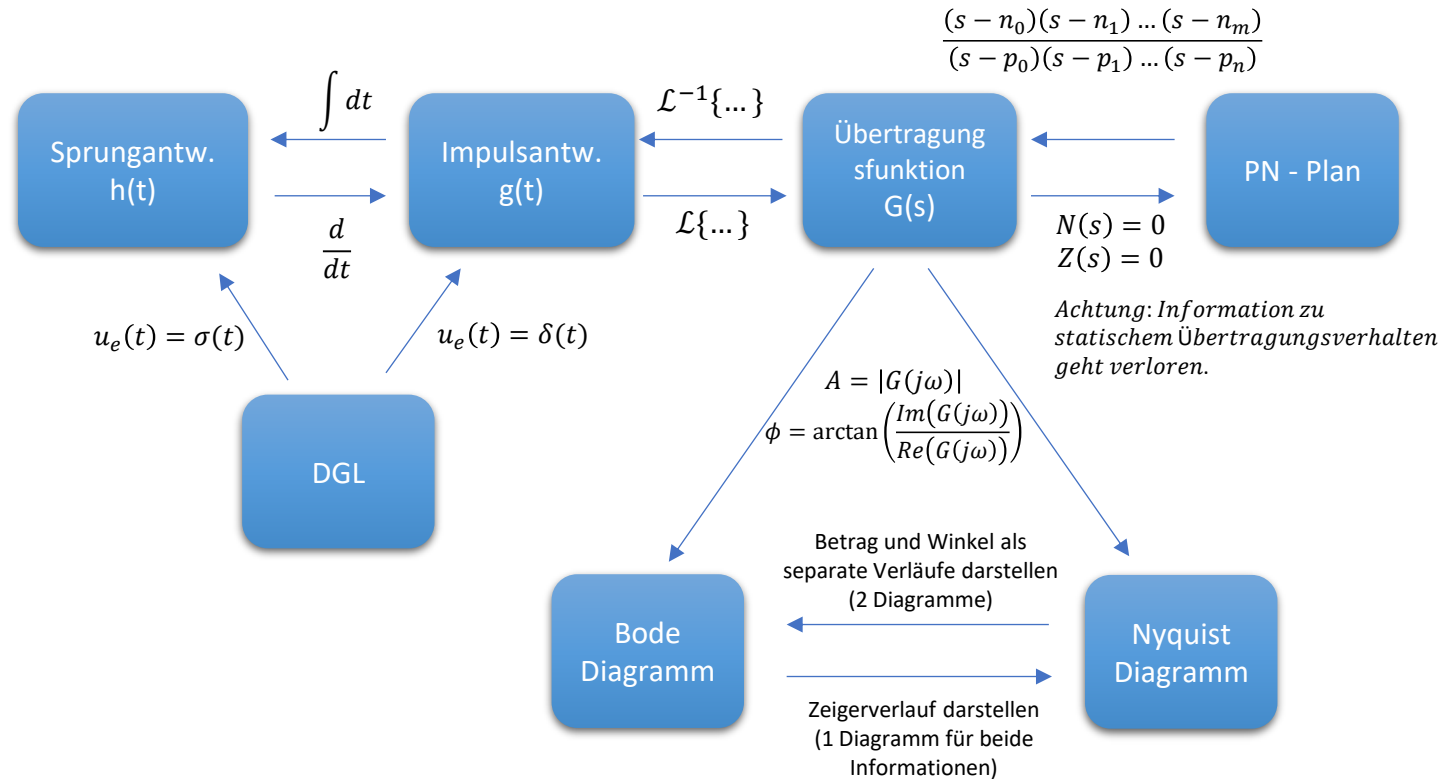
$$G(s) = k_{PID} \cdot \frac{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}{s \cdot (T_3 \cdot s + 1)} \quad T_1, T_2 \gg T_3$$

---

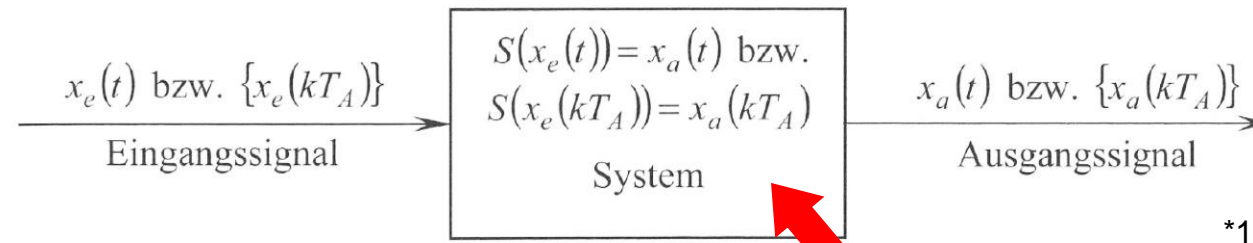
# Systemmodellierung

---

## Übersicht Systembeschreibungen



„Ein System ist das mathematische Modell eines Prozesses.  
Das mathematische Modell ordnet einem Eingangssignal ein  
Ausgangssignal zu.“



**Bild 8.2** Eingangssignal, System, Ausgangssignal

math. Modell



Wie kann ein mathematisches,  
theoretisches Modell zu einem  
realen System gefunden werden?



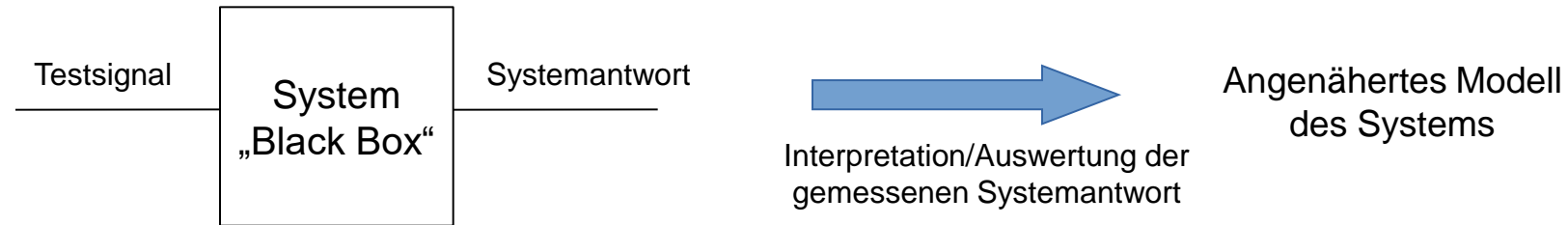
---

## Systemmodellierung – „Black Box“ Ansatz

---

---

### Praktisch, empirischer „Black Box“ Ansatz



Dieser Ansatz wird angewendet, wenn

- die innere Struktur eines Systems unbekannt ist
- das System zu kompliziert zu beschreiben ist

Ablauf

- Anregung System mit zielgerichteten Funktionen (Testsignal)
- Messen der Reaktion des Systems auf diese Testsignale (Systemantwort)
- Angenäherten Modell des Systems aus den Messdaten erstellen

Mögliche Ansätze:

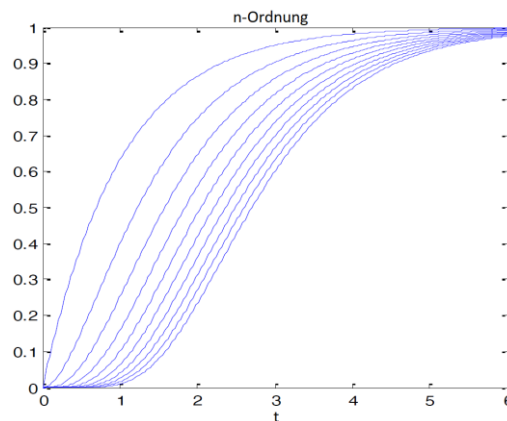
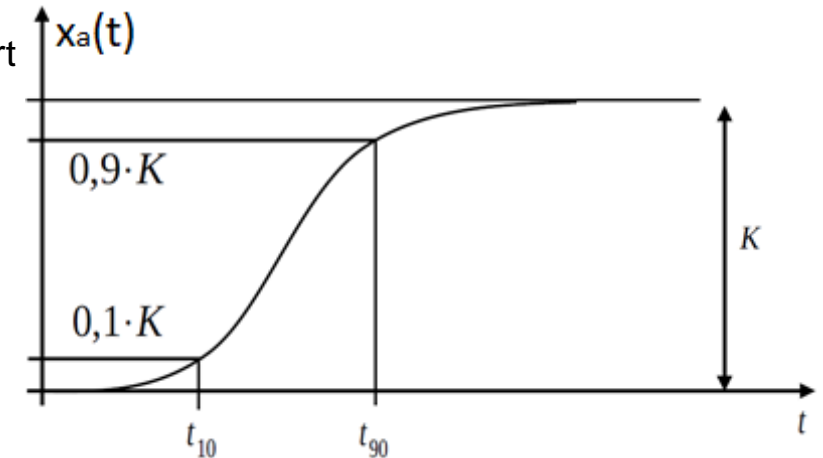
- Verfahren nach Schwarze für nicht schwingende Übertragungssysteme
  - Frequenzganganalyse
-

Verfahren nach Schwarze für nicht schwingende Übertragungssysteme

(Zeit-Prozentkennwert-Verfahren)

Verfahren nach Schwarze für nicht schwingende Übertragungssysteme

- ◆ Messen von  $t_{10}$ ,  $t_{50}$ ,  $t_{90}$  und Endwert  $K$  aus Sprungantwort
- ◆ Ordnung des Systems aus Tabelle abschätzen (gegeben durch Verhältnis  $t_{10}/t_{90}$ )
- ◆ Koeffizienten  $a_{10}$ ,  $a_{50}$  und  $a_{90}$  aus Tabelle auslesen
- ◆ Zeitkonstante  $T$  berechnen aus:  
$$T = \frac{1}{3} \cdot (a_{10} \cdot t_{10} + a_{50} \cdot t_{50} + a_{90} \cdot t_{90})$$
- ◆ Somit ist Übertragungsfunktion gegeben mit:

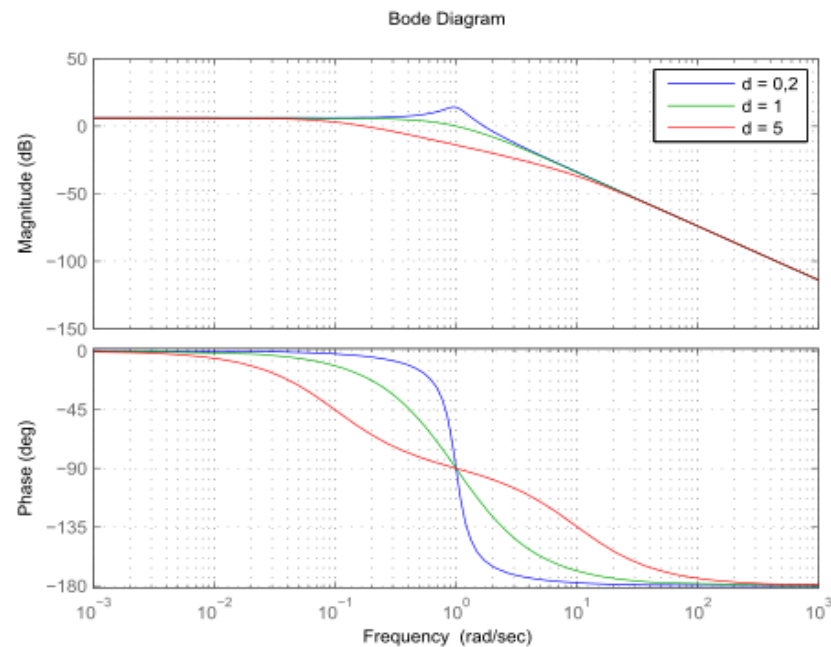


$$G(s) = \frac{K}{(1 + s \cdot T)^n}$$

$t_{10}/t_{90}$	n	$a_{10}$	$a_{50}$	$a_{90}$
0.05 bis 0.09	1	9.49	1.44	0.43
bis 0.17	2	1.88	0.6	0.26
bis 0.23	3	0.91	0.37	0.19
bis 0.28	4	0.57	0.27	0.15
bis 0.322	5	0.41	0.21	0.13
bis 0.355	6	0.32	0.18	0.11
bis 0.38	7	0.26	0.15	0.1
bis 0.41	8	0.22	0.13	0.09
bis 0.428	9	0.18	0.12	0.08
bis 0.45	10	0.16	0.1	0.07

## Frequenzgangsanalyse

- ◆ Harmonische Schwingung (Sinus) mit definierter Amplitude am Systemeingang anlegen
- ◆ Frequenz der Schwingung am Eingang variieren („wobbeln“)
- ◆ Amplitude und Phase am Systemausgang ermitteln  
→ BODE-Diagramm



\*1

Bodediagramm eines PT2-Gliedes ( $K = 2$ ,  $T = 1$ ,  $d = 0.2; 1; 5$ )



---

# **Systemmodellierung – theoretischer Ansatz**

**inkl. Laplace Transformation und Testfunktionen im Bildbereich**

---

---

### Direkt theoretischer Ansatz

1. Innere Struktur des Systems durch Dekomposition/Zerlegung bzw. Aggregation/Zusammenfügen von elementaren Komponenten identifizieren
2. Mathematische Beschreibung der Wechselwirkungen innerhalb des Systems und vom System nach außen aufgrund physikalischer Grundgesetze
3. Wahl der Repräsentation des mathematischen Modells

Beispiele für Repräsentationen:

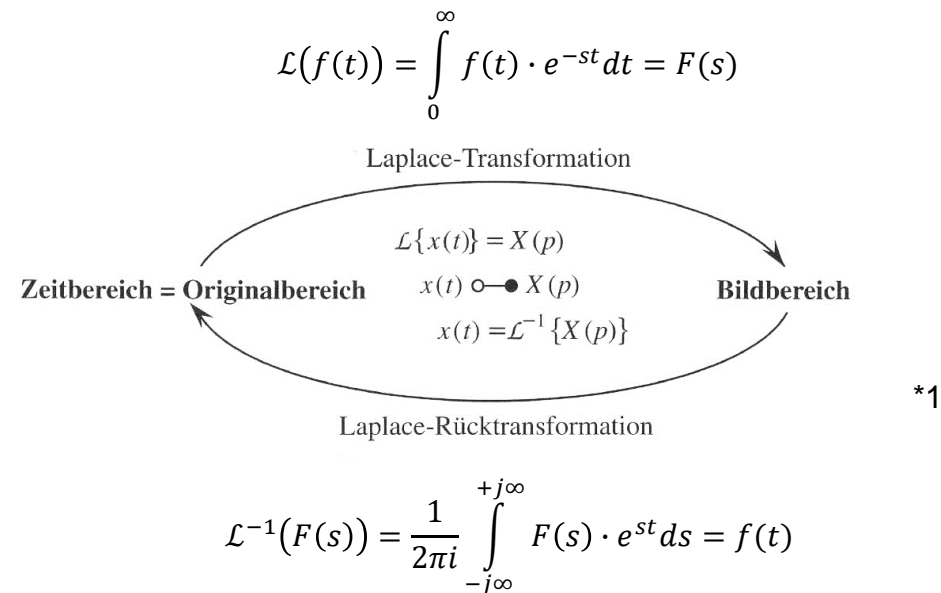
- DGL bzw. DGL-System
- Zustandsraumdarstellung
- Übertragungsfunktion im Bildbereich
- BODE - Diagramm
- PN - Plan
- Nyquist - Diagramm
- Systemantworten

Die verschiedenen Repräsentationen des Systems können ineinander überführt werden. Hierbei passiert kein wesentlicher Informationsverlust, jedoch eignen sich die unterschiedlichen Darstellungen für unterschiedliche Analysen besser und schlechter.

---

## Laplace – Transformation

Mithilfe der Laplace-Transformation kann eine Funktion vom Zeitbereich in den sogenannten Bildbereich bzw. mithilfe der Laplace-Rücktransformation vom Bildbereich in den Zeitbereich überführt werden.



Wo hilft uns das?

Anmerkung: Hier wurde tlw. eine andere Notation gewählt. Es gilt jedoch  $p = s$ .

## Systembeschreibung/Modell

Ein lineares zeitinvariantes System wird durch eine *lineare inhomogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten* beschrieben

$$a_n^{(n)} x_a(t) + \dots + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = b_m^{(m)} \dot{x}_e(t) + \dots + b_1 \dot{x}_e(t) + b_0 x_e(t)$$

\*1

Lösung von DGL → schwierig, aufwändig

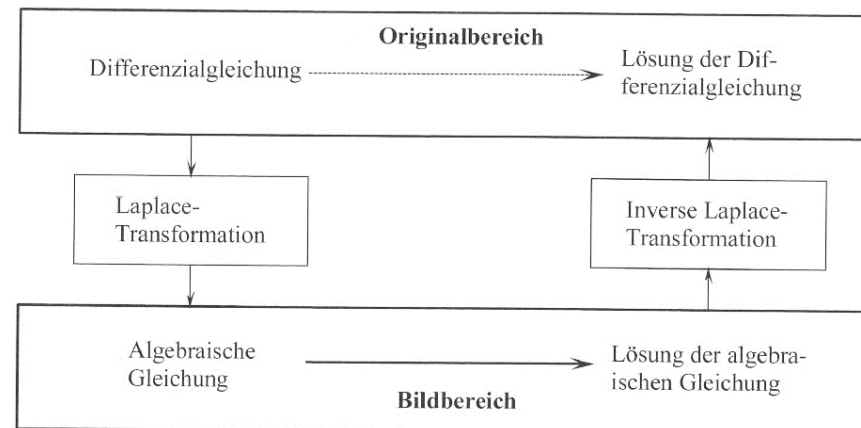


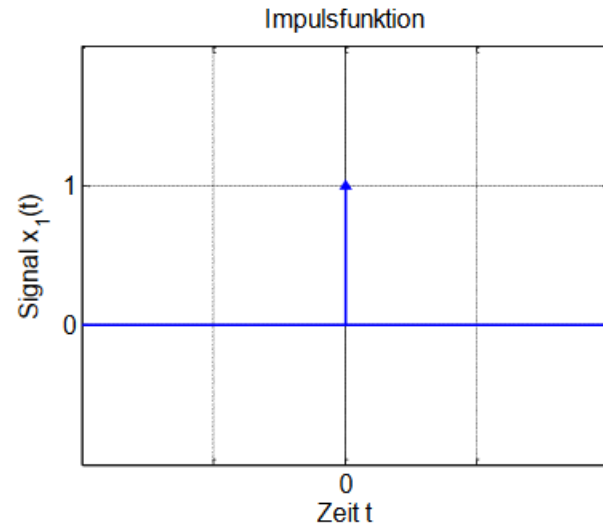
Bild 10.14 Lösung einer Differenzialgleichung mittels Laplace-Transformation, schematisch

\*2

Lösung von algebraischer Gleichung → sehr viel einfacher

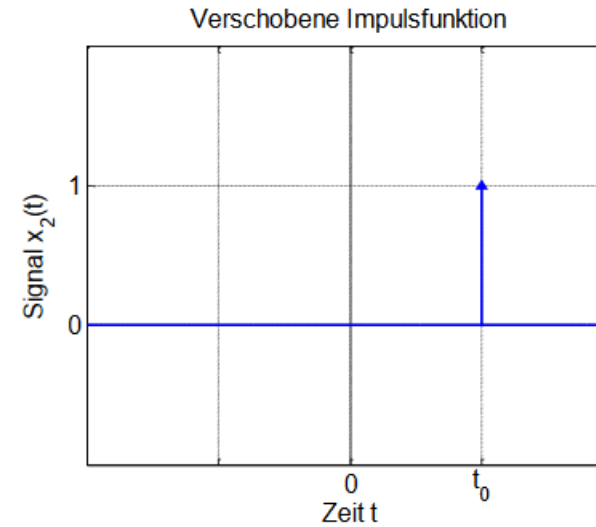
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \dots$$

## Impulsfunktion



$$x_1(t) = \delta(t)$$

$$X_1(s) = 1$$



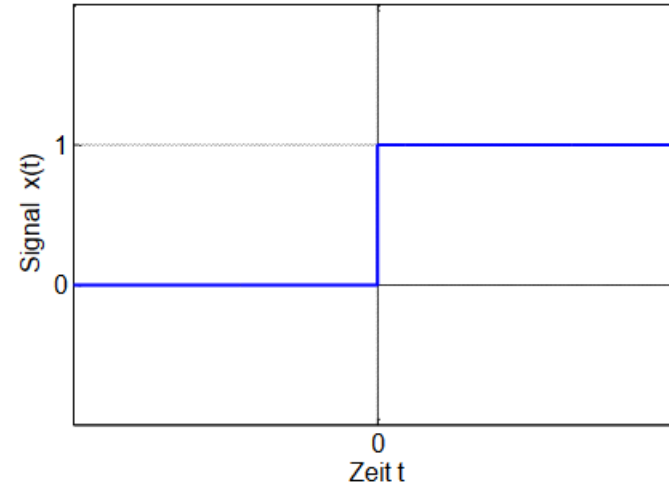
$$x_2(t) = \delta(t - t_0)$$

$$X_2(s) = e^{-s \cdot t_0}$$

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = e^{-s \cdot 0} \cdot \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$X_2(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-s \cdot t} dt = e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-s \cdot t_0}$$

## Sprungfunktion



$$x(t) = \sigma(t)$$

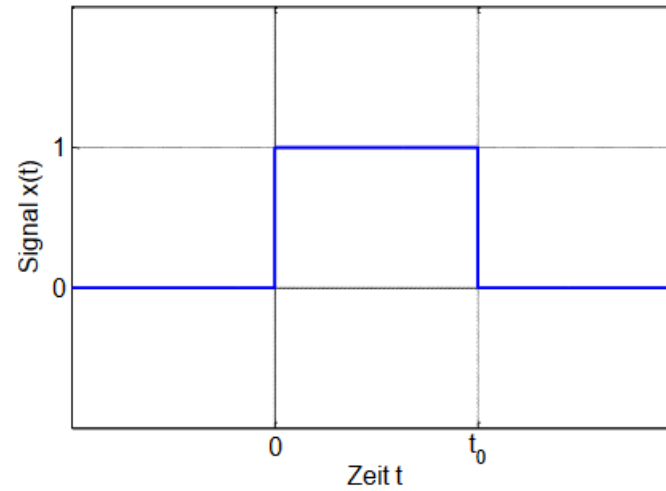
$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\delta + j \cdot \omega) \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{s}$$

### Rechteckfunktion



$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot t_0})$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} (\sigma(t) - \sigma(t - t_0)) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} (\sigma(t) - \sigma(t - t_0)) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{t_0} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) = \int_0^{t_0} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_0^{t_0} = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t_0} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot t_0})$$

---

## Beispiele Laplace-Transformation und Systemmodellierung

---



Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung

Gegeben ist ein Signal mit folgender Differentialgleichung

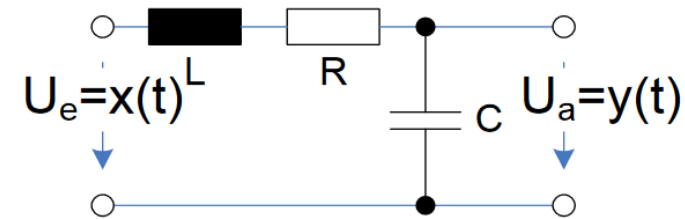
$$\frac{d^3 u(t)}{dt^3} + \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\ddot{u}(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad u(0) = 1$$

- a) Transformieren Sie die Differentialgleichung händisch in den Laplace-Bereich und den Ausdruck nach  $U(s)$  auf.
- b) Berechnen Sie die Polstellen der Laplace-Transformierten  $U(s)$  und stellen Sie die Polstellen in der komplexen Ebene dar. Handelt es sich bei dem Signal  $u(t)$  um ein schwingendes Signal? Erreicht das Signal einen stationären Endwert? Begründen Sie Ihre Antworten.

Gegeben ist folgender Reihenschwingkreis



Dieser kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden

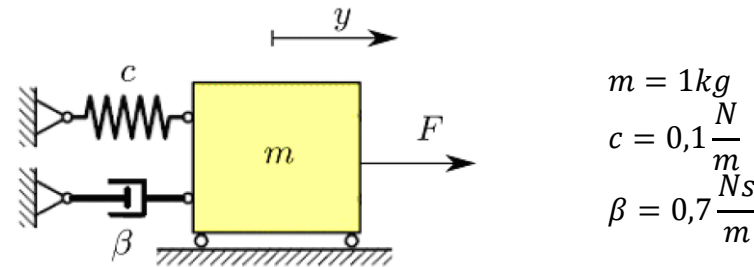
$$L \cdot C \cdot \ddot{u}_a(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u_e(t)$$

Gegeben sind folgende Anfangsbedingungen

$$\ddot{u}_a(0) = 0, \quad \dot{u}_a(0) = 0, \quad u_a(0) = 0$$

- Transformieren Sie die Systemgleichung in den Bildbereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$
- Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems
- Welche Bedingung muss für den Kriechfall, aperiodischen Grenzfall und den Schwingfall gelten.
- Plotten Sie für jeden dieser Fälle die Sprungantwort des jeweiligen Systems. (Matlab)  
 $R = 100\Omega$ ,  $C = 1\mu F$

Gegeben ist ein gedämpftes Feder-Masse-System



Die Feder wird durch eine lineare Kennlinie (Federkonstante  $c$ ) beschrieben. Die Position  $y$  der Masse  $m$  wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse wirkt zusätzlich eine äußere Kraft  $F$  und eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft (Dämpferkonstante  $\beta$ ). Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße  $u = F$  und der Ausgangsgröße  $y$  auf.

- Geben Sie die mathematische Beschreibung des Systems in Form einer gewöhnlichen Differenzialgleichung an.
- Transformieren Sie die Systemgleichung in den Bildbereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$ .

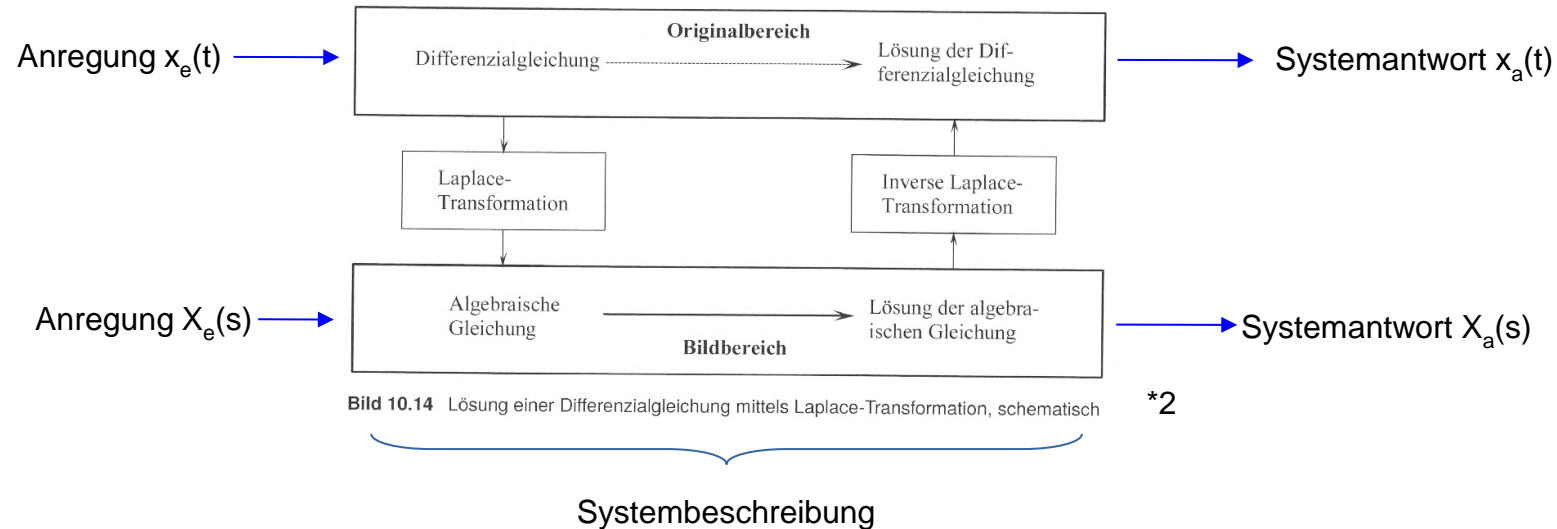
---

# Impulsantwort, Übertragungsfunktion und Faltung

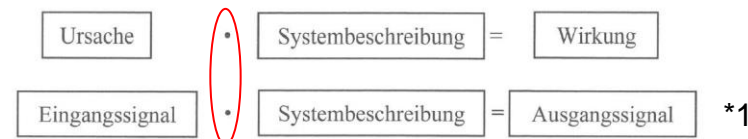
## „Extra“

---

## Systemantworten



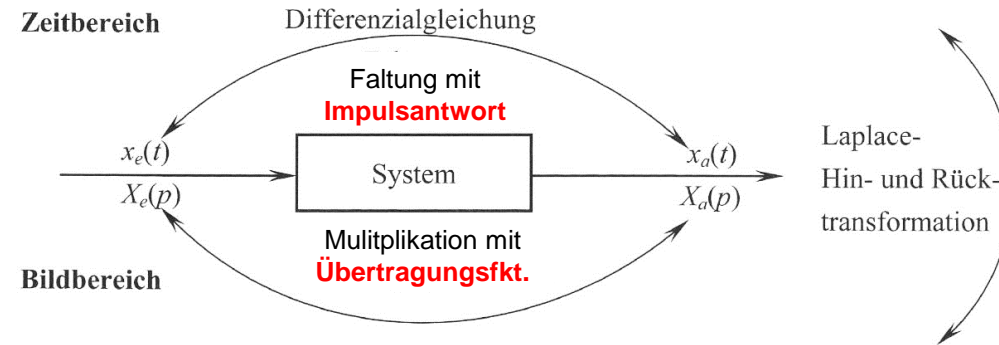
Abstrakt dargestellt suchen wir also folgenden Zusammenhang:



Symbolischer Operator  
(Operator ist abhängig ob Repräsentation in Zeit- oder Bildbereich!)

**Wird als Eingangssignal ein Dirac-Impuls  $x_e(t) = \delta(t)$  gewählt, erhält man als Ausgangssignal  $x_a(t) = g(t)$  die Impulsantwort. (→ Diese enthält die vollständige Information über das System = Systembeschreibung)**

## Faltung mit Impulsantwort



**Bild 10.27** Zusammenhang zwischen Ein-, Ausgangssignal und System sowie den Beschreibungen im Zeit- und Bildbereich

**Diese kann also auch verwendet werden, um die Reaktion des Systems auf ein beliebiges Eingangssignal zu berechnen.**

Das Ausgangssignal  $x_a(t)$  ist das Ergebnis der Faltung von Impulsantwort  $g(t)$  und Eingangssignal  $x_e(t)$ .

$$x_a(t) = g(t) * x_e(t) \quad (10.128)$$

Wirkung  $\rightarrow$   $x_a(t)$   
 Systembeschreibung  $\rightarrow$   $g(t)$   
 Verknüpfender Operator  $\rightarrow$   $*$   
 Ursache  $\rightarrow$   $x_e(t)$

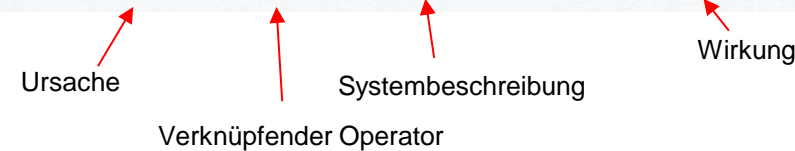
\*2

## Multiplikation mit Übertragungsfunktion

Das Ergebnis der Multiplikation von Übertragungsfunktion  $G(p)$  und Laplace-transformiertem Eingangssignal  $X_e(p)$  ist das Laplace-transformierte Ausgangssignal  $X_a(p)$

$$X_e(p) \cdot G(p) = X_a(p) \quad (10.125)$$

$\mathcal{L} \{ \text{Eingangssignal} \} \cdot \text{Systembeschreibung} = \mathcal{L} \{ \text{Ausgangssignal} \}$



\*1

Das Ausgangssignal  $x_a(t)$  erhält man nach der Laplace-Rücktransformation.

$$x_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(p) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ G(p) X_e(p) \} \quad (10.126)$$

Der direkte Weg im Zeitbereich zur Ermittlung der Systemreaktion  $x_a(t)$  ist über die Faltung möglich. Die Multiplikation von Bildfunktionen wird zur Faltung von Zeitfunktionen.

$$X_a(p) = G(p) \cdot X_e(p) \longleftrightarrow \mathcal{L}^{-1} \{ G(p) \} * \mathcal{L}^{-1} \{ X_e(p) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(p) \} \quad (10.127)$$

Die Laplace-Rücktransformierte der Übertragungsfunktion  $G(p)$  ist die Impulsantwort  $g(t)$ . \*2

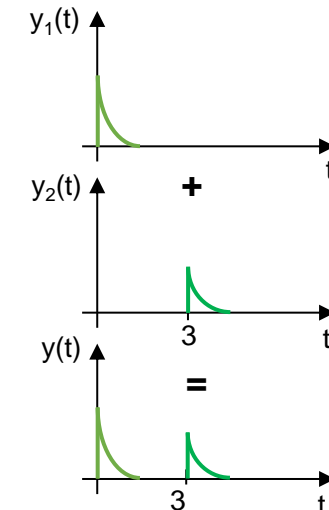
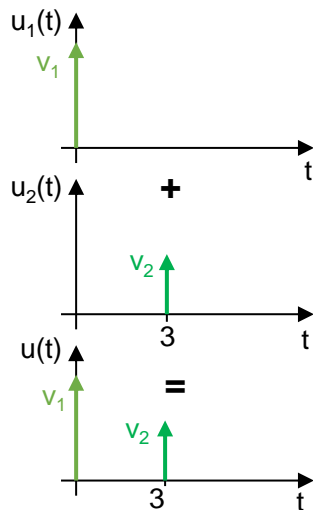
## Systemantworten

Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet auf einen Impuls  $\delta(t)$  am Eingang mit der Impulsantwort  $g(t)$ . Entsprechend antwortet es auf eine Linearkombination von Impulsen

$$u(t) = \underbrace{v_1 \cdot \delta(t)}_{=u_1(t)} + \underbrace{v_2 \cdot \delta(t-3)}_{=u_2(t)} \quad (3.98)$$

mit der gleichen Linearkombination von Impulsantworten

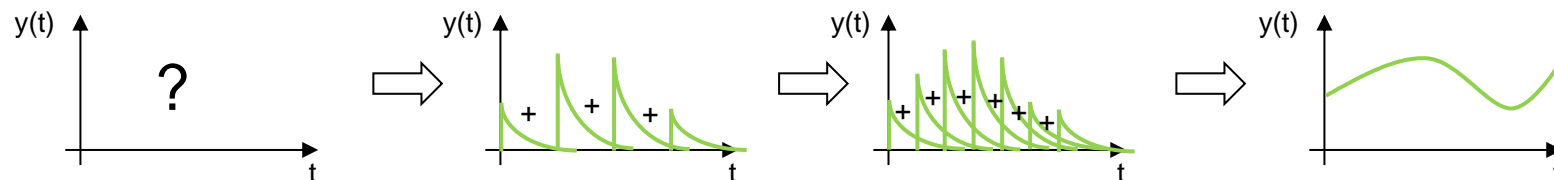
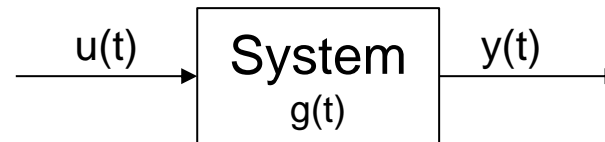
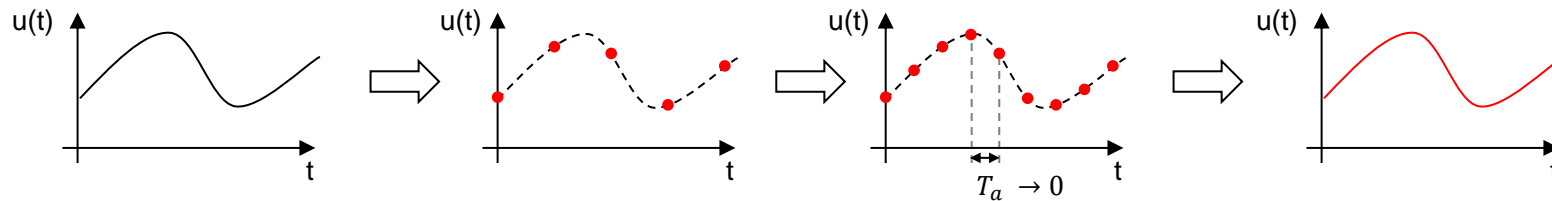
$$y(t) = \underbrace{v_1 \cdot g(t)}_{=y_1(t)} + \underbrace{v_2 \cdot g(t-3)}_{=y_2(t)} \quad (3.99)$$





Ein beliebiges Eingangssignal  $u(t)$  wird durch ein unendlich oft und mit unendlich hoher Frequenz abgetastetes Signal interpretiert.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = u(t) * g(t)$$

### Systemantworten

Dieser Zusammenhang kann auf beliebige Eingangssignale verallgemeinert werden. Wegen der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion kann ein beliebiges Eingangssignal  $u(t)$  dargestellt werden als

$$u(t) = u(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.100)$$

Anschaulich kann die Gleichung als Superposition unendlich vieler Impulse  $\delta(t - \tau)$  mit dem Gewicht  $u(\tau)$  interpretiert werden, die zusammen das Signal  $u(t)$  darstellen. Jeder einzelne Impuls  $\delta(t - \tau)$  besitzt die Systemantwort  $g(t - \tau)$ . Damit ergibt sich das Ausgangssignal  $y(t)$  aus der Superposition unendlich vieler Systemantworten  $g(t - \tau)$  mit dem Gewicht  $u(\tau)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = u(t) * g(t) \quad (3.101)$$

Bei bekannter Impulsantwort  $g(t)$  kann das Ausgangssignal  $y(t)$  für eine beliebige Systemanregung  $u(t)$  aus der Integralgleichung (3.101) berechnet werden. Das Integral wird als Faltungsintegral bezeichnet. Abkürzend wird die Faltungsoperation mit einem  $*$  - Symbol dargestellt.