

# Integraltransformationen

Fourier- und Laplace-Transformation

Dr.-Ing. Steffen Finck

# Inhalt

- ① Fourierreihe
- ② Fourier- und Laplace-Transformation
- ③ Transformationssätze
- ④ Ableitung und Integration
- ⑤ Anwendungen

# Fourierreihe

## Fourierreihe

Eine **periodische** Funktion existiert eine Fourierreihe<sup>a</sup> falls

- sich das Periodenintervall in endlich viele Teilintervalle unterteilen lässt, in denen die Funktion stetig und monoton ist und
- bei Unstetigkeitsstellen die links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren.

Unter diesen Voraussetzungen kann die periodische Funktion  $f(t)$  als eine Summe von **harmonischen Schwingungen** dargestellt werden.

---

<sup>a</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

# Fourierreihe

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  als Grundkreisfrequenz
- $T$  als Periodendauer
- $a_n$  und  $b_n$  als Koeffizienten der reellwertigen Fourierreihe
- $c_n$  als Koeffizienten der komplexen Fourierreihe

# Fourierreihe

Berechnung der Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) dt = 2c_0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = c_n + c_{-n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}^+$$

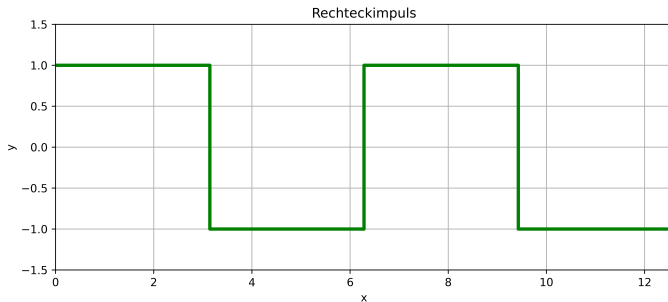
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = j(c_n - c_{-n}) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}^+$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

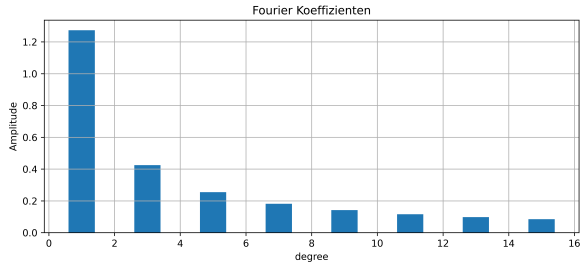
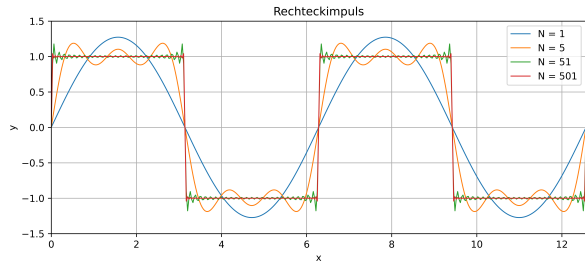
# Fourierreihe

Beispiel: Rechteckkurve

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



# Fourierreihe - Beispiel



# Inhalt

- ① Fourierreihe
- ② Fourier- und Laplace-Transformation
- ③ Transformationssätze
- ④ Ableitung und Intregation
- ⑤ Anwendungen



# Ausgangspunkt: Fourierreihe

Was passiert wenn,

- $f(t)$  nicht periodisch ist?
- das Signal im **Frequenzbereich** stetig wäre?

Bleiben wir bei dem 2. Fall: Es ändern sich folgende Eigenschaften:

- aus diskreten Punkten werden stetige Werte:  $n\omega_0 \mapsto \omega$
- aus der Differenz zweier Punkten wird:  $\Delta\omega \mapsto d\omega$
- aus einer diskreten Funktion wird eine stetige Funktion:  $c_n \mapsto F(\omega)$
- Was passiert mit der Periodendauer  $T$ ?

# Fourier-Transformation

Mit den angegebenen Änderung ergibt sich aus der Darstellung der komplexen Fourierreihe

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}_{\text{diskrete Punkte im Frequenzbereich}} \mapsto \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega}_{\text{stetige Funktion im Frequenzbereich}}$$

ergibt sich die **Fourier-Transformation** als

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

und die entsprechende Rücktransformation (**inverse Fourier-Transformation**)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

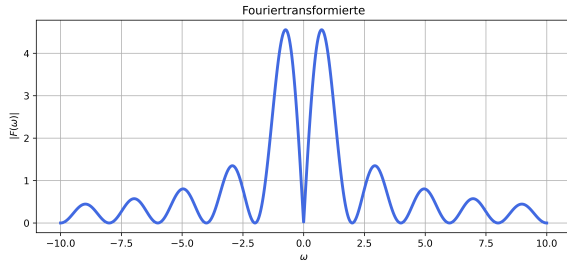
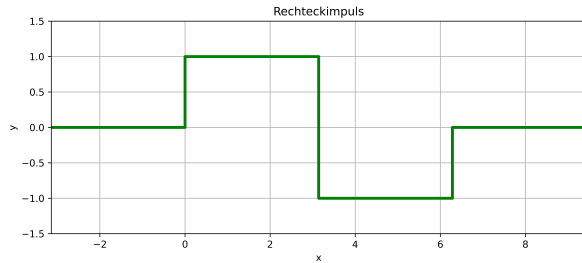
# Fourier-Transformation

## Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation  $F(\omega)$  einer *nicht-periodischen* Funktion  $f(t)$  stellt eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen aller Kreisfrequenzen dar. Falls die Fourier-Transformation existiert, ist diese **eindeutig**.

- Darstellung als **Korrespondenzen**:  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$
- es gibt, abhängig vom Gebiet, andere Vorfaktoren für Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation bzw. auch im Exponenten
- $F(\omega)$  - Frequenzspektrum,  $|F(\omega)|$  - Amplitudendichte / -spektrum

# FT - Beispiel



# Integraltransformation

Integraltransformationen sind *Operatoren* der Form

$$X(u) = \int_{\Omega} x(t)K(u, t)dt$$

mit

- $x(t)$  mit  $t \in \Omega$  - Funktion im **Originalbereich**
- $X(u)$  mit  $u \in \Omega'$  - Funktion im **Bildbereich**
- $K(u, t)$  - **Kern** (kernel) der Transformation

Neben der Fouriertransformation ( $K(\omega, t) = e^{-j\omega t}$ ) existieren weitere

Integraltransformationen

# Integraltransformation

Integraltransformationen sind hilfreich bei

- Signalanalysen, z.B. Kompression von Daten (mp3-Format)
- Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Lösen von partiellen Differentialgleichungen
- Bildverarbeitung
- Lösen von physikalischen Problemen
- ...

Die Vorgehensweise ist immer ident: Durch die Transformation in den Bildbereich, lässt sich das Problem **einfacher** lösen. Die Lösung wird mittels **Rücktransformation** wieder in den Originalbereich transformiert.

# Integraltransformation - Laplace Transformation

Neben der Fourier-Transformation betrachten wir die einseitige **Laplace Transformation**<sup>1</sup>

$$L(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (3)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{L(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} L(s)e^{st}ds \quad (4)$$

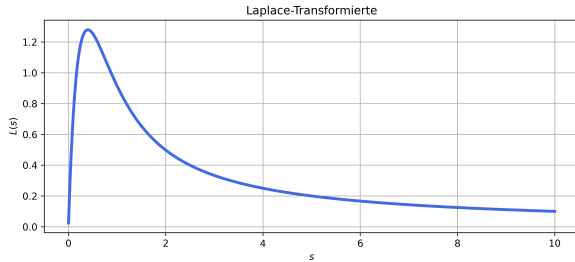
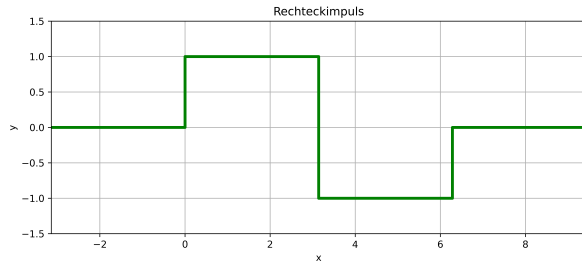
mit

- $s = \delta + j\omega$  als komplexe Frequenz
- es gilt:  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  (Betrachtung von kausalen Zusammenhängen)

---

<sup>1</sup>Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

# LT - Beispiel





# Existenzbedingungen

Kann für jedes *beliebige*  $f(t)$  eine FT oder LT bestimmt werden?

- FT und LT sind **uneigentliche Integrale** ( $[-\infty, \infty]$  bzw.  $[0, \infty]$ )
- hinreichende Bedingung:  $f(t)$  muss stückweise monoton und stetig sein
- FT:  $f(t)$  muss *absolut integrierbar*<sup>2</sup> sein: z.B.  $|f(t)| < \infty$  oder  $f(t < a) = 0 \wedge f(t > b) = 0$
- LT:  $f(t)$  muss beschränkt sein ( $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$ ) und beidseitige Grenzwerte an Sprungstellen existieren (LT existiert auch für periodische Funktionen!)

---

<sup>2</sup>  $\int |f(t)| dt < \infty$  oder  $\int f(t)^2 dt < \infty$

# Fourier-Sinus und Fourier-Kosinus

Unter Ausnutzung von Eigenschaften von Funktion (gerade, ungerade) und dem Zusammenhang  $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$  kann folgendes gezeigt werden:

- gerade Funktionen:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = 2F_c(\omega)$$

mit  $F_c$  als Fourier-Kosinus-Transformation

- ungerade Funktionen:

$$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = -2jF_s(\omega)$$

mit  $F_s$  als Fourier-Sinus-Transformation

# Spezielle Funktion

- Spungfunktion (engl. Heaviside-(Theta))

$$\sigma(t - a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (5)$$

- Diracsche Delta-Funktion (ist eigentlich eine *Distribution* / *verallgemeinerte Funktion*)

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (6)$$

# Spezielle Funktion

- beide Funktionen sind miteinander verbunden (per verallgemeinerter Ableitung / Integration)

$$\int_{-\infty}^t \delta(u - a) du = \sigma(t - a) \quad (7)$$

$$\frac{D\sigma(t - T)}{Dt} = \delta(t - T) \quad (8)$$

# Spezielle Funktion - FT und LT

Sprungfunktion:

$$\text{Fourier: } \sigma(t) \circ\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad [\sigma(t-a) - \sigma(t-b)] \circ\bullet \frac{j}{\omega} (e^{-jb\omega} - e^{-ja\omega})$$

$$\text{Laplace: } \sigma(t) \circ\bullet \frac{1}{s} \qquad [\sigma(t-a) - \sigma(t-b)] \circ\bullet \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$$

Diracsche Delta-Funktion:

$$\text{Fourier: } \delta(t-T) \circ\bullet e^{-j\omega T}$$

$$\text{Laplace: } \delta(t-T) \circ\bullet e^{-sT}$$

# Inhalt

- ① Fourierreihe
- ② Fourier- und Laplace-Transformation
- ③ Transformationssätze**
- ④ Ableitung und Integration
- ⑤ Anwendungen

# Transformationssätze

Anstatt für **beliebige**  $f(t)$  immer die Integrale auszuwerten, soll ein **Baukastenprinzip** verwendet werden.

- aus Tabellen können die entsprechenden Korrespondenzen abgelesen werden, z.B.

$$e^{-at}\sigma(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

- über **Transformationssätze** können beliebige Funktionen auf diese Korrespondenz zurückgeführt werden, z.B.

$$e^{-a(t-b)}\sigma(t-b) \longleftrightarrow \frac{e^{-j\omega b}}{a + j\omega}$$

# Linearitätssatz

Linearkombination von Funktionen:

$$f(t) = k_1 g(t) + k_2 h(t)$$

- Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [k_1 g(t) + k_2 h(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= k_1 \mathcal{F}\{g(t)\} + k_2 \mathcal{F}\{h(t)\}\end{aligned}\tag{9}$$

- Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dots = k_1 \mathcal{L}\{g(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{h(t)\}\tag{10}$$



## Linearitätssatz - Beispiel

Beispiel:  $(2 + 3t)e^{-5t}\sigma(t)$

Gegeben:  $e^{at}\sigma(t) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$  und  $te^{at}\sigma(t) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$

Bestimme  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ !

Lösung

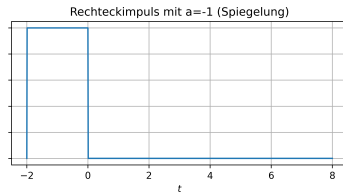
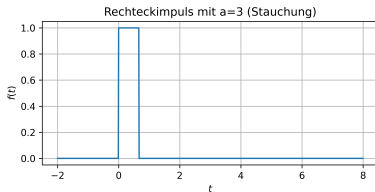
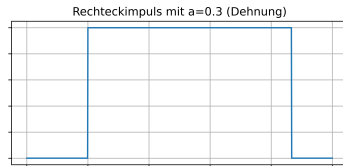
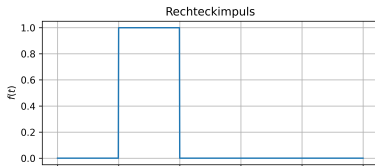
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{13 + 2s}{(5 + s)^2} \text{ für } s > -5$$

Warum ist die Bedingung  $s > -5$  notwendig?

# Ähnlichkeitssatz

Ähnlichkeitstransformation:  $t \rightarrow at$

Was passiert dann?



## Ähnlichkeitssatz - FT und LT

FT (Integration mit Substitution  $u = at$ ,  $a \in \mathcal{R}$ ):

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt = \dots = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}_{\left(\frac{\omega}{a}\right)}\{f(t)\} \quad (11)$$

LT (Integration mit Substitution  $u = at$ ,  $a \in \mathcal{R}^+$ ):

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt = \dots = \frac{1}{a}\mathcal{L}_{\left(\frac{s}{a}\right)}\{f(t)\} \quad (12)$$

## Ähnlichkeitssatz - Beispiel

Rechteckimpuls :  $g(t) = \sigma\left(\frac{t}{3}\right) - \sigma\left(\frac{t}{3} - 2\right)$

Korrespondenz:  $\sigma(t - T_1) - \sigma(t - T_2) \longleftrightarrow j \frac{e^{-jT_2\omega} - e^{-jT_1\omega}}{\omega}$

Lösung:  $a = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= \mathcal{F}\left\{f\left(\frac{t}{3}\right)\right\} = 3\mathcal{F}_{(3\omega)}\{f(t)\} \\ &= j \cdot 3 \cdot \frac{e^{-j \cdot 2 \cdot (3 \cdot \omega)} - 1}{3 \cdot \omega} = j \frac{e^{-j6\omega} - 1}{\omega}\end{aligned}$$

# Zeitverschiebungssatz

Verschiebung entlang der Zeitachse:  $g(t) = f(t - a)$  mit  $a \in \mathcal{R}$

- FT (Integration mit Substitution  $u = t - a$ ,  $a \in \mathcal{R}$ ):

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a)e^{-j\omega t}dt = \dots = e^{-ja\omega} \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (13)$$

- LT (Verschiebung nach rechts, Integration mit Substitution  $u = t - a$ ,  $a \in \mathcal{R}^+$ ):

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\sigma(t - a)\} = \int_0^{\infty} f(t - a)\sigma(t - a)e^{-st}dt = \dots = e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (14)$$

- LT (Verschiebung nach links, Integration mit Substitution  $u = t + |a|$ ,  $a \in \mathcal{R}^-$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t + |a|)\sigma(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t + |a|)\sigma(t)e^{-st}dt = \dots \\ &= e^{s|a|} \left( \mathcal{L}\{f(t)\} - \int_0^{|a|} f(t)e^{-st}dt \right) \end{aligned} \quad (15)$$

## Zeitverschiebungssatz - Beispiele

Ausgangsfunktion:  $e^{-t^2} \circ \bullet \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

gesucht:

- Verschiebung um 1.5 Einheiten nach rechts ( $\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}-j\frac{3}{2}\omega}$ )
- Verschiebung um 0.5 Einheiten nach links ( $\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}+j\frac{1}{2}\omega}$ )

Ausgangsfunktion:  $t^2\sigma(t) \circ \bullet \frac{2}{s^3}$

gesucht:

- Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts ( $\frac{2e^{-2s}}{s^3}$ )
- Verschiebung um 1 Einheit nach links ( $\frac{s^2+2s+2}{s^3}$ )

# Dämpfungssatz

Dämpfung/Modulation im Zeitbereich

$$\text{FT: } e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{LT: } e^{-at} \quad \text{mit } a \in \mathcal{R}^+$$

Auswirkung

$$\text{FT: } \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}_{(\omega-\omega_0)}\{f(t)\}$$

$$\text{LT: } \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}_{(s+a)}\{f(t)\}$$

# Dämpfungssatz - Beispiele

FT:

$$e^{-at}\sigma(t) \circ\bullet \frac{1}{a+j\omega} \qquad e^{-at}\sin(\omega_0 t)\sigma(t) \circ\bullet ??? \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

LT (mit  $\omega_0, a > 0$ ):

$$\sin(\omega_0 t)\sigma(t) \circ\bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \qquad e^{-at}\sin(\omega_0 t)\sigma(t) \circ\bullet ??? \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$



## Symmetrie zwischen Dämpfungs- und Verschiebungssatz

Eine Verschiebung im Zeitbereich erzeugt in Dämpfung im Frequenzbereich

$$\text{FT : } f(t - a) \circ\bullet e^{-ja\omega} \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{LT : } f(t - a)\sigma(t - a) \circ\bullet e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Umgekehrt erzeugt eine Verschiebung im Frequenzbereich zu einer Dämpfung im Zeitbereich

$$\text{FT : } \mathcal{F}_{(\omega - \omega_0)}\{f(t)\} \bullet\circ e^{j\omega_0 t} f(t) \quad \text{LT : } \mathcal{L}_{(s + a)}\{f(t)\} \bullet\circ e^{-at} f(t)$$

# Inhalt

- ① Fourierreihe
- ② Fourier- und Laplace-Transformation
- ③ Transformationssätze
- ④ Ableitung und Intregration
- ⑤ Anwendungen

## Ableitungen im Zeitbereich

FT

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt = \textit{partielle Integration} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (16)$$

LT

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \textit{partielle Integration} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = (s)^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(t=0) \quad (17)$$

$$= (s)^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)$$

## Ableitungen im Bildbereich

FT

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{F}\{f(t)\}}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d(e^{-j\omega t})}{d\omega} dt = -j\mathcal{F}\{tf(t)\} \\ \frac{d^n \mathcal{F}\{f(t)\}}{d\omega^n} &= (-j)^n \mathcal{F}\{t^n f(t)\}\end{aligned}\tag{18}$$

LT

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}\{f(t)\}}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d(e^{-st})}{ds} dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\} \\ \frac{d^n \mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^n} &= \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}\end{aligned}\tag{19}$$

## Ableitungen - Beispiele

FT:

$$e^{-at}\sigma(t) \circ\bullet \frac{1}{a+j\omega} \qquad te^{-at}\sigma(t) \circ\bullet ??? \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

mittels Ableitungssatz im Zeitbereich für  $te^{-at}\sigma(t)$

LT (mit  $\omega_0, a > 0$ ):

$$\sin(\omega_0 t)\sigma(t) \circ\bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \qquad t \sin(\omega_0 t)\sigma(t) \circ\bullet ??? \frac{2s\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

mittels Ableitungssatz im Bildbereich für  $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

# Integration im Zeitbereich

FT

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(u)du\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(u)du\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \textit{partielle Integration} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{f(t)\}\end{aligned}\quad (20)$$

LT

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(u)du\right] e^{-st} dt \\ &= \textit{partielle Integration} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}\end{aligned}\quad (21)$$

# Integration im Bildbereich

FT

$$\int_{-\infty}^{\omega} \mathcal{F}\{f(t)_{(u)}\} du = \int_{-\infty}^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jut} dt du = \mathcal{F}\left\{\frac{f(t)}{j2\pi t}\right\} \quad (22)$$

Lösung mittels *Vertauschungssatz*

LT

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)_{(u)}\} du &= \int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-ut} dt du \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \int_s^{\infty} e^{-ut} du dt = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} \end{aligned} \quad (23)$$

## Integration - Beispiele

FT: Zusammenhang zwischen Ladung  $q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$  und Stromstärke  $i(t)$  im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}\{q(t)\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{i(t)\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F}\{i(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{q(t)\}$$

LT (mit  $\omega_0, a > 0$ ):

$$t^3 \circ \bullet \frac{6}{s^4} \quad t^2 \circ \bullet ??? \frac{2}{s^3}$$



## Faltung

Wie sieht der funktionale Zusammenhang aus bei einer Multiplikation im Bildbereich?

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g(t)\}\mathcal{F}\{h(t)\}\}\\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \right] e^{j\omega t} d\omega\\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau+\theta)} e^{j\omega t} d\omega d\theta d\tau\\&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \delta(t - [\tau + \theta]) d\theta d\tau\\&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau = g(t) * h(t)\end{aligned}\tag{24}$$

# Faltung

$f(t) = g(t) * h(t)$  ist die Faltung (engl. Convolution), welche die Überlagerung eines Signals  $g(t)$  mit einem anderen **zeitlich verschobenen** Signal  $h(t)$  beschreibt

weitere Regeln:

$$\mathcal{F}\{g(t) \cdot h(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (25)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{g(t)\} \cdot \mathcal{L}\{h(t)\}\} = \int_0^t g(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (26)$$

$$\mathcal{L}\{g(t) \cdot h(t)\} = \frac{1}{j2\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha - jt}^{\alpha + jt} \mathcal{L}_{(\tau)}\{g(t)\} \cdot \mathcal{L}_{(s-\tau)}\{h(t)\}d\tau \quad (27)$$

# Vertauschungssatz der FT

Ausnutzung von Symmetrien der Fourier-Transformation

$$f(t) \circ\bullet F(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad F(t) \circ\bullet 2\pi f(-\omega) \quad (28)$$

Beispiel:

$$\delta(t + a) \circ\bullet e^{j\omega a} \quad \Leftrightarrow \quad e^{jta} \circ\bullet 2\pi\delta(-\omega + a)$$

# Grenzwertsätze der LT

Anfangswertsatz

$$f(t = 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (29)$$

Endwertsatz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (30)$$

Anwendung: Bestimmung von Anfangswerten und stationären Verhalten **ohne**  
Bestimmung der Funktion im Zeitbereich

# Inhalt

- ① Fourierreihe
- ② Fourier- und Laplace-Transformation
- ③ Transformationssätze
- ④ Ableitung und Intregation
- ⑤ Anwendungen

# Anwendungen von LT und FT

FT und LT werden für eine Reihe von Anwendungen eingesetzt

- Signalanalyse
- Signalrekonstruktion
- Signaltransformationen
- Lösen von Differentialgleichungen
- Betrachtung von LTI Systemen

# Lösen von Differentialgleichungen

Beispiel:  $y' + 4y = t^3$     $y(1) = 2$

- mittels Ableitungssatz:  $s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t^3\}$
- aus Tabelle  $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \longleftrightarrow \frac{1}{s^n}$
- umformen:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{6}{s^4(s+4)} + \frac{y(0)}{s+4}$$

- Rücktransformation 1: Faltung des ersten Termes

$$\frac{6}{s^4(s+4)} \bullet \circ \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3e^{-4t})$$

- Rücktransformation 2: aus Tabelle  $\frac{y(0)}{s+4} \bullet \circ y(0)e^{-4t}$
- Allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3e^{-4t}) + y(0)e^{-4t}$$

# Lösen von Differentialgleichungen

Beispiel:  $y' + 4y = t^3$     $y(1) = 2$

- Bestimmung des Anfangswertes  $y(0)$  durch einsetzen

$$y(1) = \frac{1}{128} (32 - 24 + 12 - 3 + 3e^{-4}) + y(0)e^{-4} = 2 \quad \rightarrow \quad y(0) \approx 101.92$$

- spezielle Lösung

$$y(t) = \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3) + 101.94e^{-4t}$$



# Lösen von Differentialgleichungen

Beispiel:  $y'' + 2y' + y = \cos 2t$   $y(0) = 1, y'(0) = 0$

- mittels Ableitungssatz:

$$s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 2s \mathcal{L}\{y(t)\} - 2y(0) + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

- umformen und einsetzen der Anfangswerte und von  $\cos(at) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 8}{(s+1)^2(s^2+4)}$$

# Lösen von Differentialgleichungen

Beispiel:  $y'' + 2y' + y = \cos 2t$   $y(0) = 1, y'(0) = 0$

- Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung: Nullstellen sind  $s_{1/2} = 1$  und  $s_{3/4} = 2j$
- Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- lösbar mittels Methoden aus Linearer Algebra

# Lösen von Differentialgleichungen

Beispiel:  $y'' + 2y' + y = \cos 2t$   $y(0) = 1, y'(0) = 0$

- Lösung ergibt

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{25} \left( \frac{28}{s+1} + \frac{20}{(s+1)^2} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{8}{s^2+4} \right)$$

- Rücktransformationen führt auf

$$y(t) = \frac{1}{25} \left( 28e^{-t} + 20te^{-t} - 3\cos(2t) + 4\sin(2t) \right)$$

# Lösen von Differentialgleichungen

Allgemein gilt für lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten folgende Beziehung

$$y' + \alpha_0 y = g(t) \circ\!\!\bullet \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{g(t)\} + y(0)}{s + \alpha_0} \quad (31)$$

und für lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = g(t) \circ\!\!\bullet \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{g(t)\} + y(0)(s + \alpha_1) + y'(0)}{s^2 + \alpha_0 s + \alpha_1} \quad (32)$$

Analog können Systeme von DGLn, partielle DGLn, Integro-DGLn und DGLn mit variablen Konstanten gelöst werden. Die idente Vorgehensweise geht auch mit der Fourier-Transformation.

# Übertragungsfunktion

LTI Systeme werden durch inhomogene, lineare DGL mit konstanten Koeffizienten beschrieben, d.h. es gilt für eine lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + \alpha_0 y = g(t) \quad \circ \bullet \quad \mathcal{F}\{y(t)\} = \underbrace{\frac{1}{j\omega + \alpha_0}}_{G(\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (33)$$

mit  $G(\omega)$  also frequenzabhängiger **Übertragungsfunktion** (bzw. **Frequenzgang**). Sie *überträgt* das Eingangssignal  $g(t)$  in das Ausgangssignal  $y(t)$ . Im Zeitbereich gilt dann

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega) * g(t)\}$$

# Übertragungsfunktion

Analog lässt sich die Übertragungsfunktion auch in der Form

$$G(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{g(t)\}} \quad \text{bzw.} \quad G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{g(t)\}} \quad (34)$$

definieren und als Verhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangssignal im Bildbereich darstellen.

Bei bekannter Übertragungsfunktion  $G(s)$  (oder  $G(\omega)$ ) lassen sich die Impuls- und die Sprungantwort des Systems ermitteln.