

Übungsblatt 2: Fourier- und Laplace-Transformation

Transformationssätze

Bestimme die Transformation in den Bildbereich mittels der angegebenen Korrespondenz.

1. $f(t) = e^{-at^2}$ mit $e^{-t^2} \circ \bullet \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
2. $f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 2a)$ mit $\sigma(t + a) - \sigma(t - a) \circ \bullet \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}$
3. $f(t) = t e^{-5t} \sigma(t)$ mit $e^{-5t} \sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{5 + j\omega}$
4. $f(t) = e^{-a|t|}$ mit $\frac{1}{a^2 + t^2} \circ \bullet \frac{\pi e^{-a|\omega|}}{a}$
5. $f(t) = \delta(t - T)$ $T > 0$ mit $\delta(t) \circ \bullet 1$
6. $f(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mit $\sin(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 + 1}$
7. $f(t) = 2^{3t}$ mit $1 \circ \bullet \frac{1}{s}$
8. $f(t) = \int_0^t \cos(u) du$ mit $\cos(t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + 1}$

Bestimme die Rücktransformation in den Originalbereich.

1. $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{s^2 + 25} - \frac{3s}{s^2 - 1}$
2. $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{(s - 5)^3} + \frac{2s}{s^2 + 25} + \frac{5}{(s - 3)^2 + 1}$
3. $\mathcal{L}(s) = \frac{\hat{u}}{\tau} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{1}{s + \tau^{-1}}$ \hat{u}, τ, ω_0 sind konstant
4. $\mathcal{L}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^2(s - 1)(s + 3)}$
5. $F(\omega) = \frac{2}{5 + j\omega} - \frac{3}{(2 + j\omega)}$
6. $F(\omega) = \frac{6}{(2 + j\omega)^2} - \frac{\pi e^{-5|\omega|}}{5} + \frac{8}{4 + \omega^2}$
7. $F(\omega) = \frac{K e^{-j\omega T_1}}{1 + j\omega T_2}$
8. $F(\omega) = \frac{3}{(2 + j\omega)(5 + j\omega)}$

Anwendungen

1. Ein Stromkreis mit einem ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L erfährt eine von außen angelegte Spannung von $u(t) = kt$ mit $k > 0$. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Stromstärke, wenn der Stromkreis im Einschaltzeitpunkt $t = 0$ stromlos ist. Der Stromkreis kann mittels folgender DGL beschrieben werden:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t)$$

2. Ein schwingungsfähiges, gedämpftes Feder-Masse-System mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$, der Federkonstanten $c = 10,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ und der Dämpferkonstanten $b = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ wird zur Zeit $t = 0$ aus der Gleichgewichtslage heraus mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ angestoßen. Untersuche die Bewegung der Masse mit Hilfe der Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$