

Übungsblatt 1: Fourier- und Laplace-Transformation

Fourierreihe

1. Bestimme die Fourierreihe der periodischen Funktion $f(t)$, welche im Bereich $[0, 2\pi]$ folgende Gleichung hat:

$$f(t) = t(2\pi - t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Stelle die Funktion und die Annäherung mittels der Fourierreihe grafisch dar.

2. Bestimme die komplexe Fourierreihe von $f(t)$, welche im Bereich $[0, T]$ folgende Gleichung hat:

$$f(t) = \frac{y_0}{T}t \quad 0 \leq t \leq T, \quad y_0 = \text{konstant}$$

Bestimme die Koeffizienten der reellwertigen Darstellung aus den ermittelten Koeffizienten.

Fourier-Transformation

Bestimme die Fourier-Transformation durch Auswertung des entsprechenden Integrals. Stelle die ursprüngliche Funktion und die Fourier-Transformierte grafisch dar.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(t) &= \begin{cases} t^2 e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ 2. \quad f(t) &= \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & -T \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Laplace-Transformation

Bestimme die Laplace-Transformation durch Auswertung des entsprechenden Integrals. Stelle die ursprüngliche Funktion und die Laplace-Transformierte grafisch dar.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(t) &= t^3 \sigma(t) \\ 2. \quad f(t) &= \begin{cases} A \sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Sprungfunktion

Ausgehend von der Sinusfunktion $\sin(t)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$, stelle folgende Funktionen mit Hilfe der Sprungfunktion mathematisch und grafisch dar.

1. Sinusfunktion die ab $t \geq 2$ verschieden von null ist
2. Sinusfunktion die bis $t \geq 2$ verschieden von null ist
3. Sinusfunktion die im Intervall $[1, 2]$ verschieden von null ist

Rücktransformation

Bestimme die Funktion im Zeitbereich durch die Auswertung des Integrals der inversen Fourier-Transformation.

$$F(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$