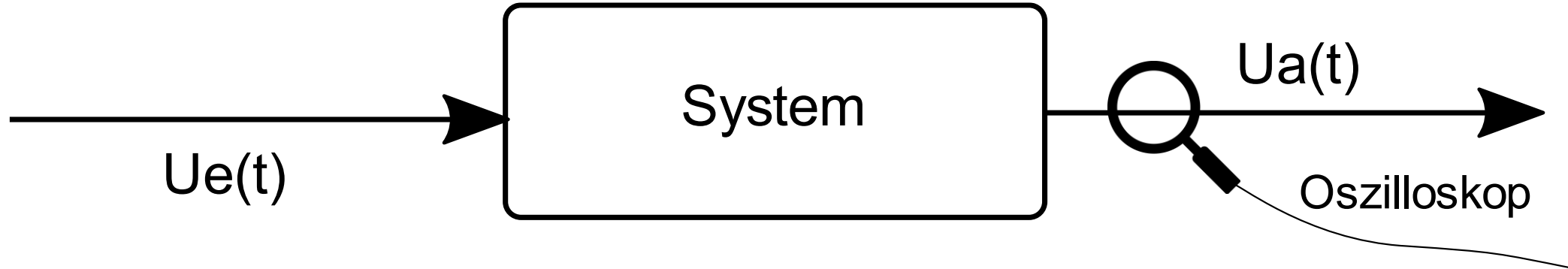

FH Vorarlberg
Integraltransformation

Signale und Systeme

Foliensatz 2 – Frequenzbereich, Blockschaltbildalgebra

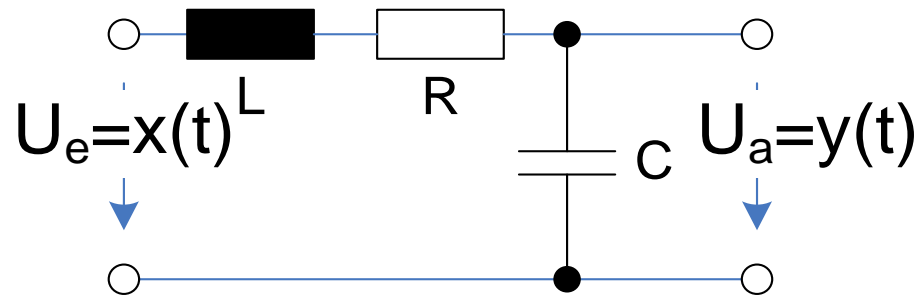


- Darstellung: Eingangssignal(t), System(t), Ausgangssignal(t)
 - Einfach darzustellen
 - Einfach messtechnisch zu ermitteln – intuitive Anschauung
 - Häufig Differentialgleichungen zur Lösungsermittlung
 - Allgemeine Form:

$$\dots + a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot \dot{x}(t) + \dots$$

- Beispiel: Sprung an dynamischem LTI System:

- Sprung(t), System(t), Out(t)



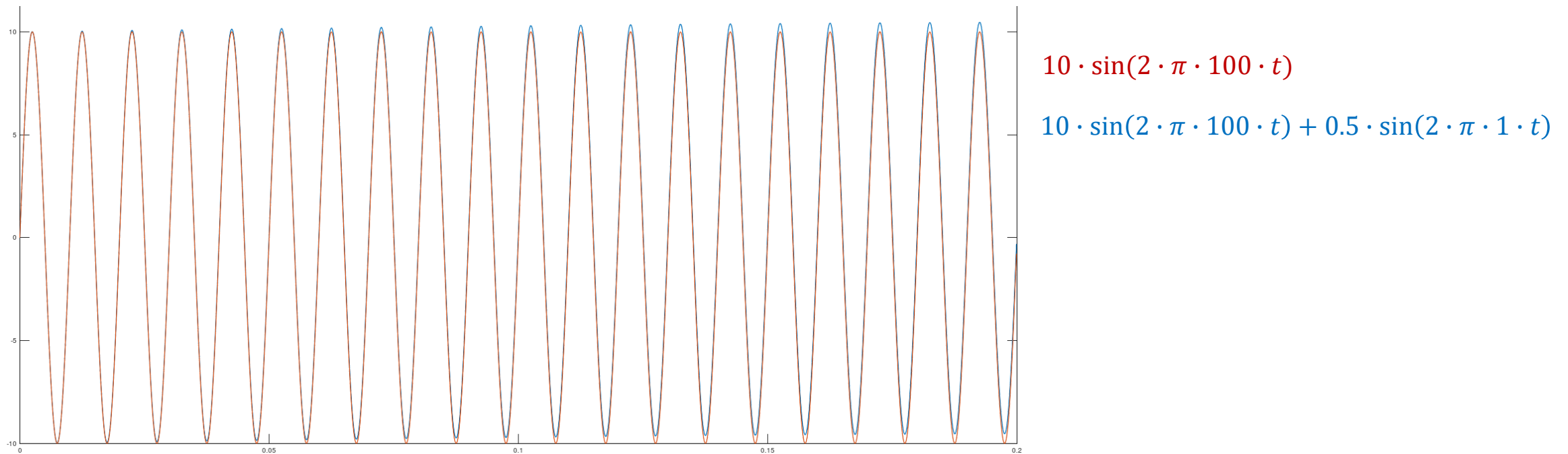
$$u_e = u_L + u_R + u_a$$

$$u_e = L \cdot \dot{i} + R \cdot i + u_a \quad i = C \cdot \dot{u}_a$$

$$L \cdot C \cdot \ddot{u}_a + R \cdot C \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e$$

- Lösen der DGL
Einsetzen von $U_e \rightarrow U_a$ berechenbar

- Komplizierte Mathematik für bereits wenig komplizierte Eingangssignale
- Anschauung eines Zeitsignals ist fehleranfällig

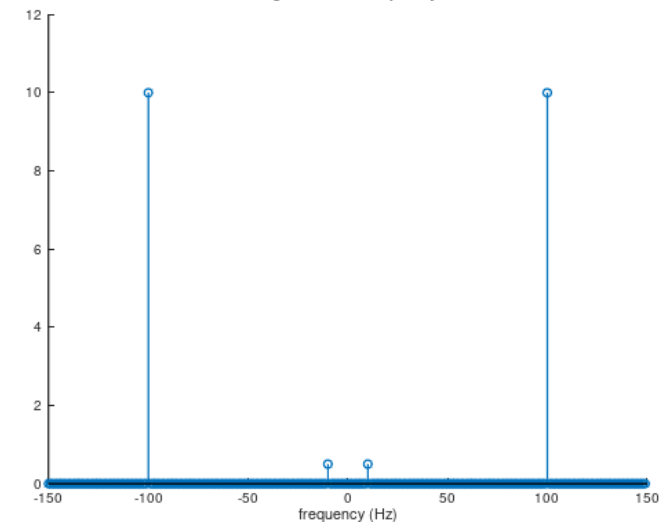


-
- Kann zu Fehlkonfiguration von Systemen führen
 - Stabilitätsthematik bis hin zu „Resonanzkatastrophe“
 - Informationsgehalt der Zeitbetrachtung eines Systems ist limitiert
 - Mittelwert, Effektivwert
 - Amplitude
 - Frequenz

Neues Konzept

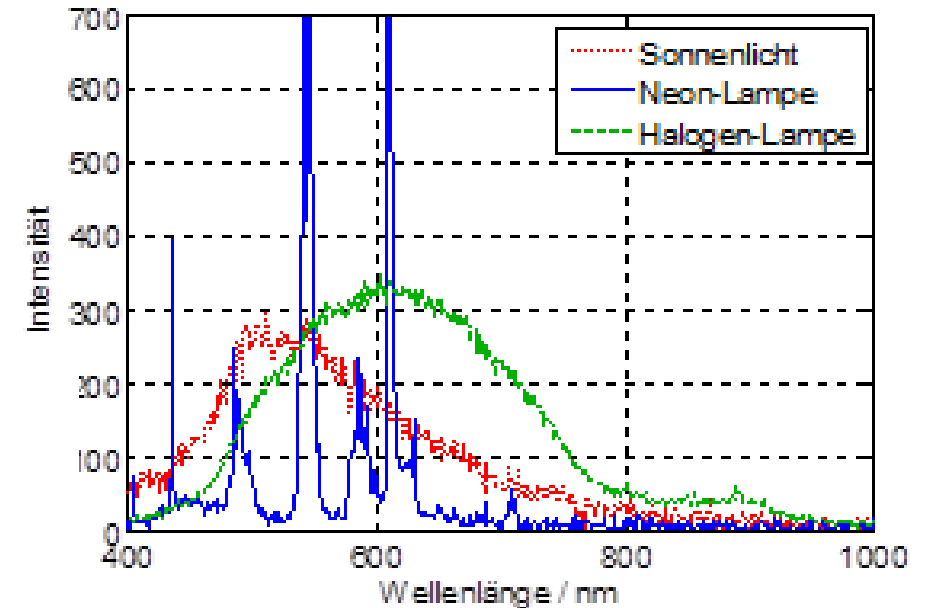
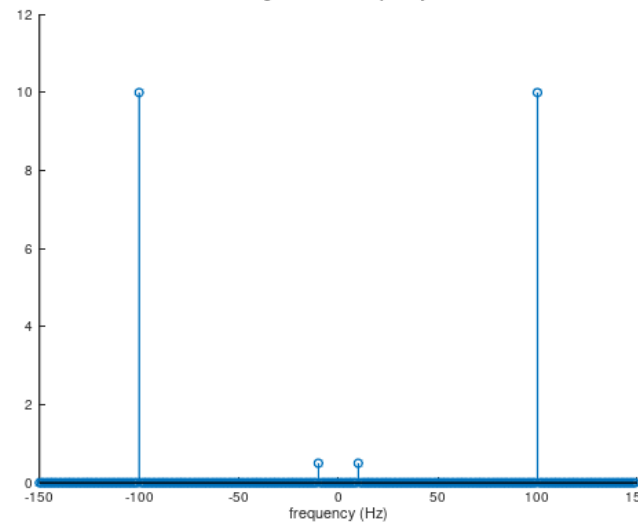
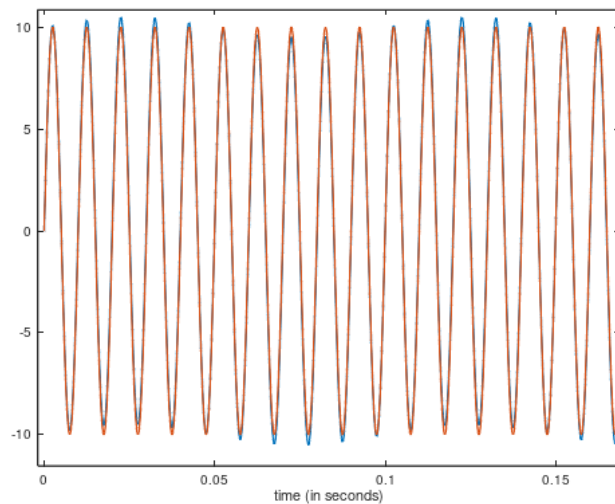
Frequenzbereich

- Frequenzbereich/Spektrum ist die Darstellung von Signalen über die Frequenz.
 - Frequenz auf x-Achse
 - Amplitude/Phase auf y-Achse
- Enorme Bedeutung in Elektrotechnik, Maschinenbau bis hin zu Quantenphysik.



- Informationsgehalt im Frequenzbereich/Spektrum höher
 - **Beispiel Licht:** Die untenstehenden Spektren werden von Menschen alle als weißes Licht wahrgenommen. Die spektralen Anteile sind jedoch deutlich verschieden

- **Beispiel elektr. Signale:**



- Mathematische Vereinfachung für LTI Systeme

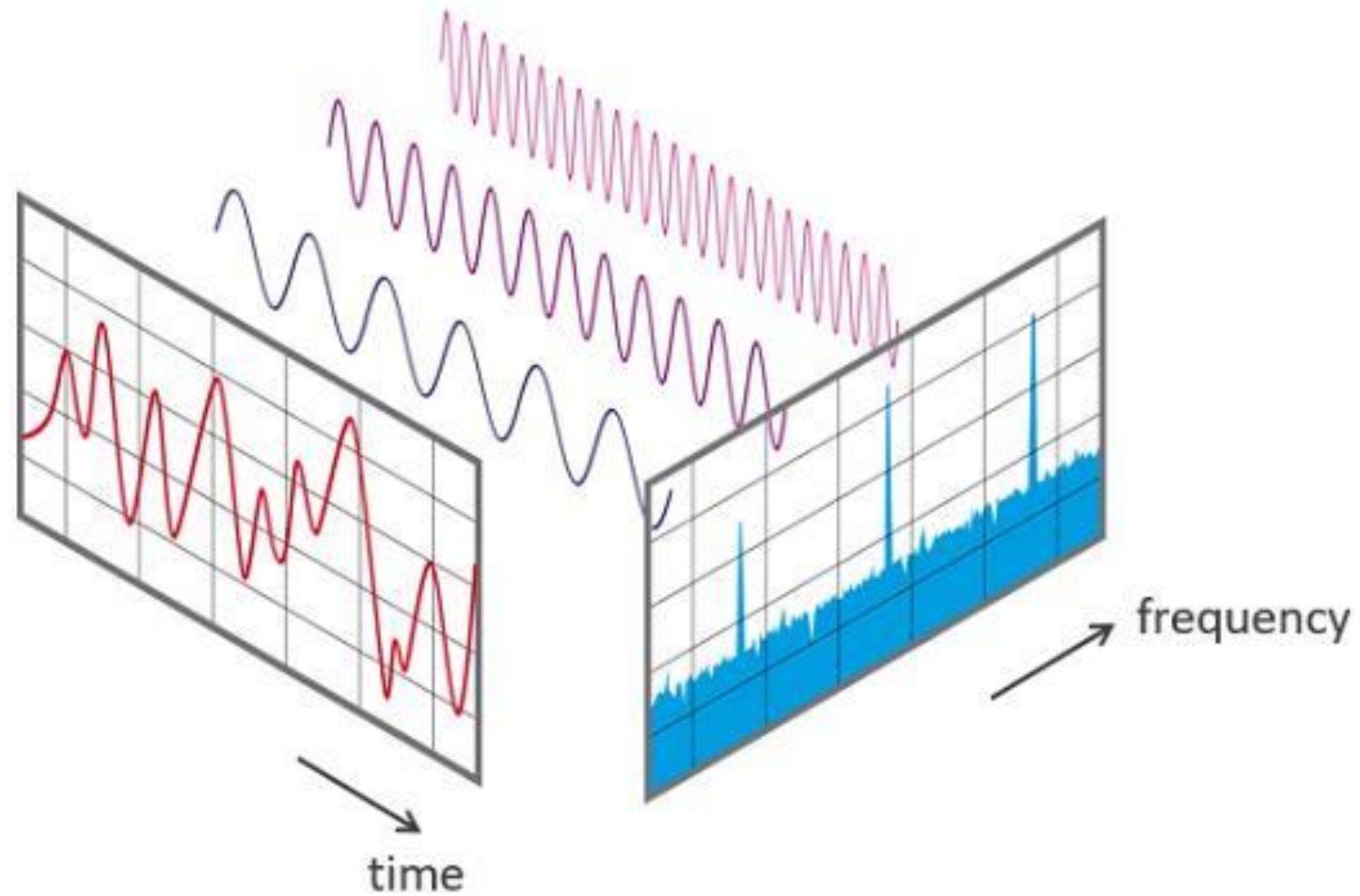
- LTI System: Ein lineares zeitinvariantes System wird allgemein durch eine lineare inhomogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben:

$$\dots + a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot \dot{x}(t) + \dots$$

- Daraus ergibt sich: Wird ein LTI-System mit einer harmonischen Schwingung angeregt, antwortet es mit einem harmonischen Signal gleicher Frequenz! Lediglich die Amplitude bzw. die Phase der Schwingung ändert sich (optional). Die Lösung der DGL für eine harmonische Schwingung ist mathematisch einfach zu bewerkstelligen.

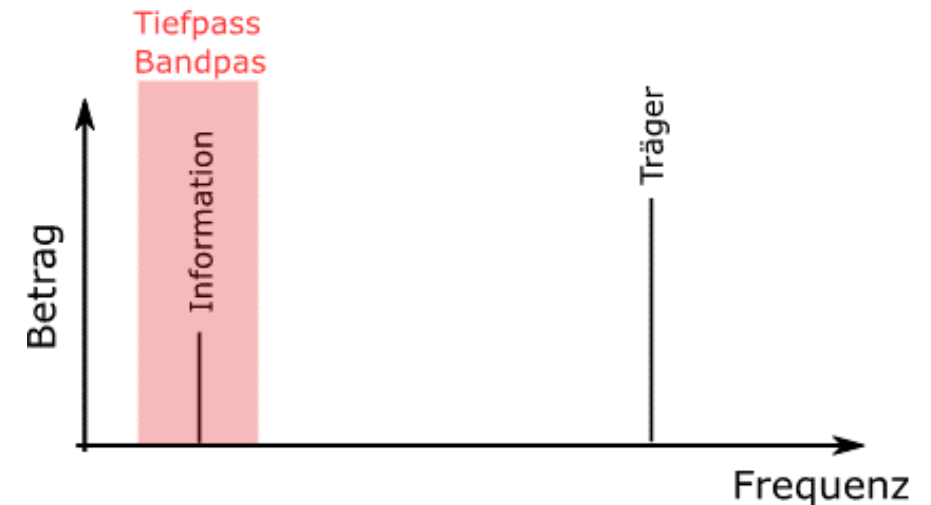
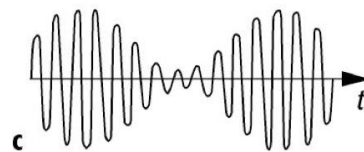
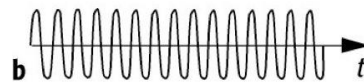
Wird nun ein Signal als Summe von verschiedenen harmonischen Schwingungen dargestellt, kann aufgrund der Linearitäts-Bestimmung von LTI-Systemen die DGL für jede einzelne Schwingung gelöst werden und das Ausgangssignal kann als Summe aller Teilantworten berechnet werden.

- **Der Frequenzbereich ist nichts anderes als die Zerlegung eines Signales in eine Summe mit unendlich vielen harmonischen Schwingungen!**



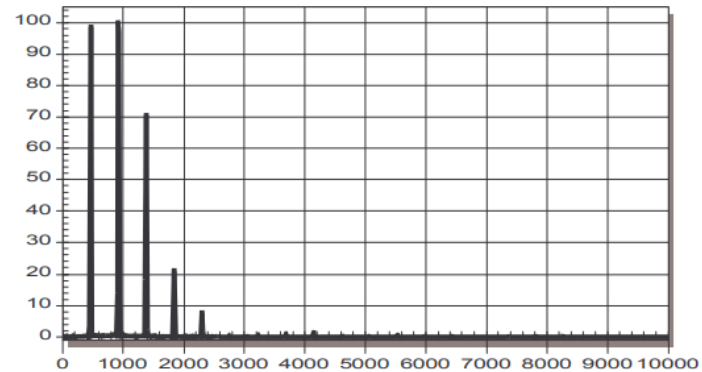
Aus den oben genannten Erkenntnissen lassen sich konkrete Anwendungen für die spektrale Anschauung von Signalen finden

- Trennung von Signalen (Filter)
 - Amplitudenmodulation: Multiplikation eines hochfrequenten mit niederfrequentem Signal. Das hochfrequente Signal wird als Trägersignal zur Signalübertragung verwendet, das niederfrequente Signal beinhaltet die eigentliche Information. Einfache Trennung der beiden Signale im Frequenz

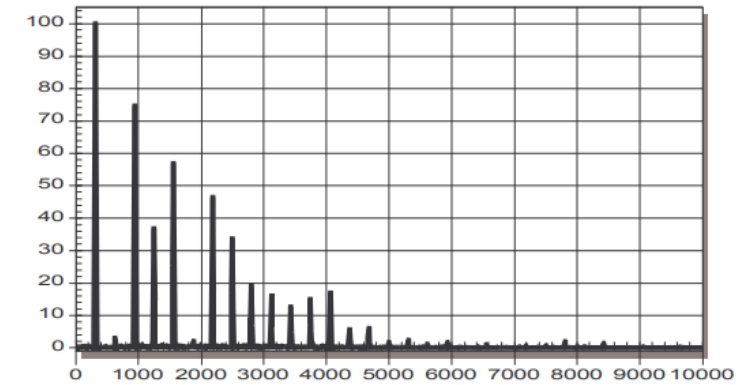


- Auslegung von Systemen
- Berechnung/Simulation von Systemantworten
- Signalsynthese

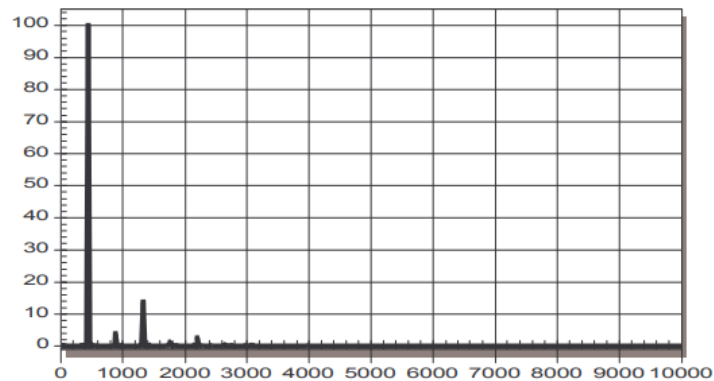
Sopransaxofon



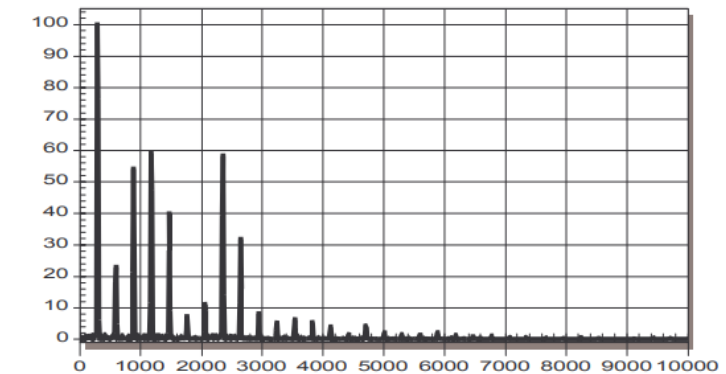
Klarinette

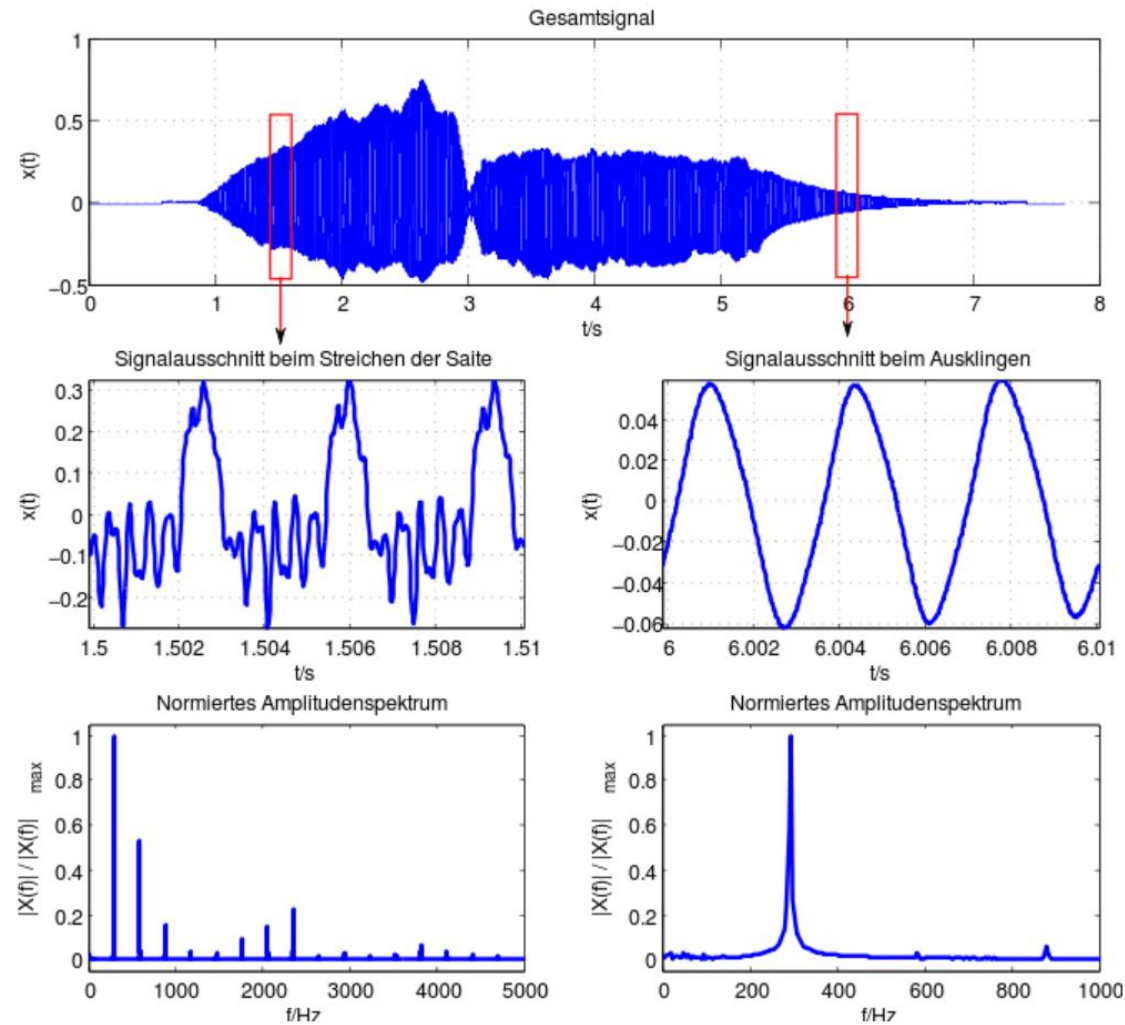


Querflöte

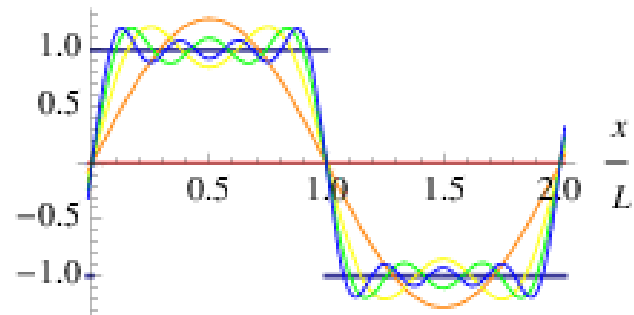


Violine

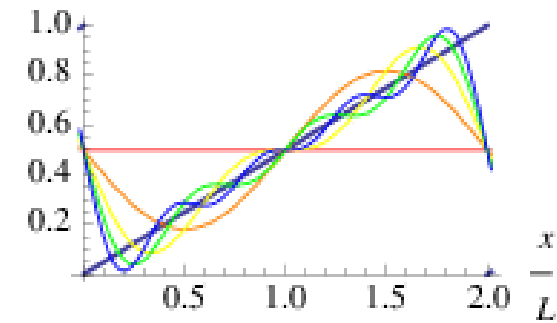




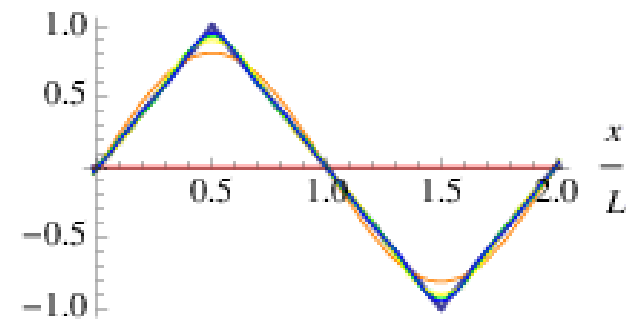
square wave



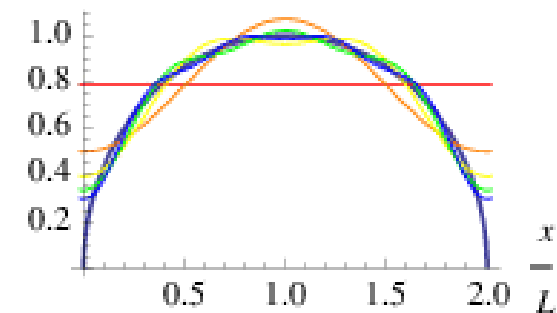
sawtooth wave



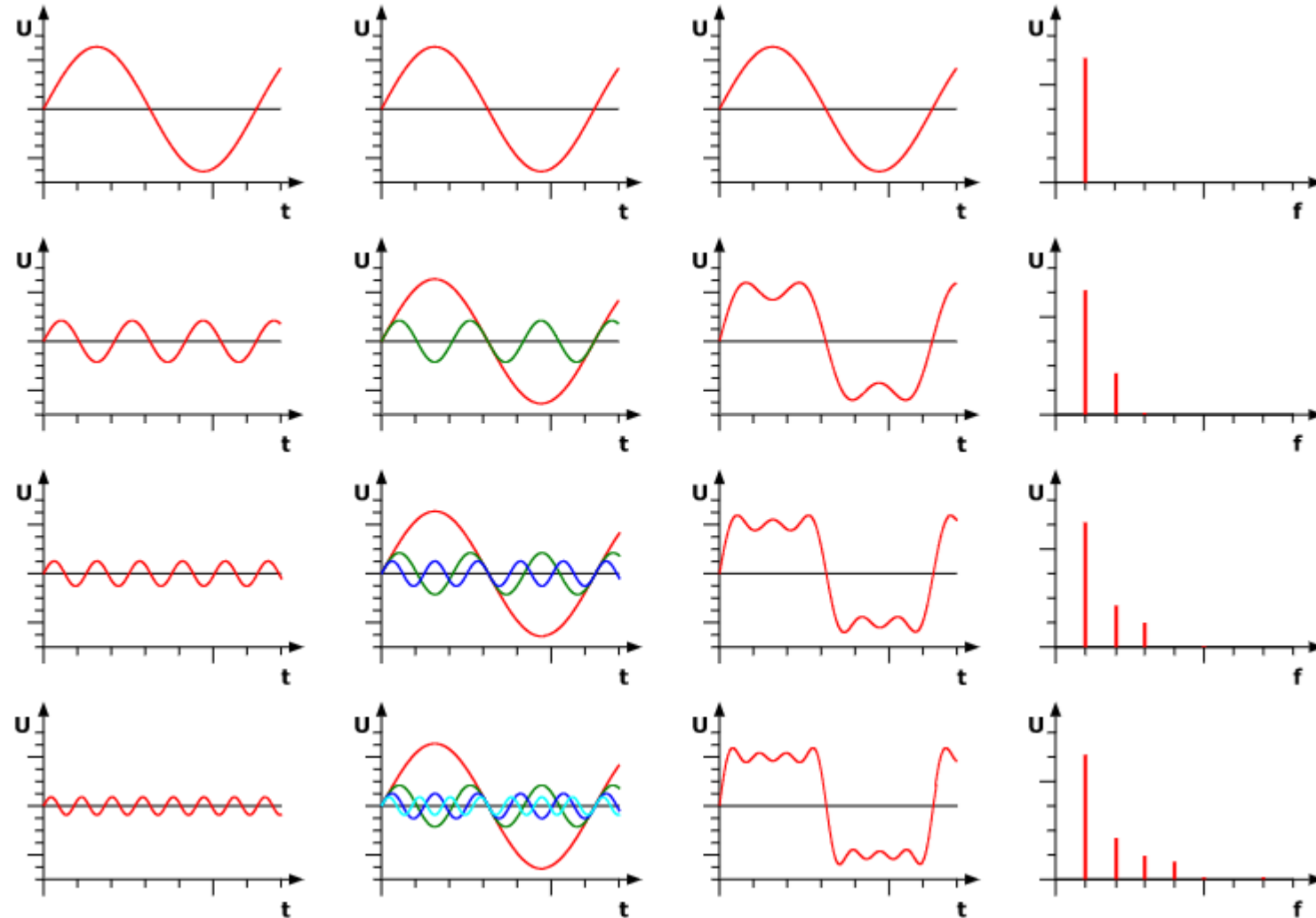
triangle wave



semicircle



- Fourier Reihe
Rechteck



- **Periodische** Zeitsignale sind über **Fourier**-Reihe als Summe von Sinus/Cosinus-Schwingungen darstellbar

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))$$

mit ω_0 gleich der Grundschiwingung des Signals

- Besser zur Anschauung: Komplexe Darstellung: $\sin(x) = \frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j}$; $\cos(x) = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})}{2}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

- Parameter $C_{n\omega_0}$ sind komplex! Folgende Informationen sind für jeden Parameter ersichtlich:
 - Amplitude
 - Phase
 - Frequenz (Wichtig: Alle vorkommenden Frequenzen sind vielfache der Grundschiwingung!)

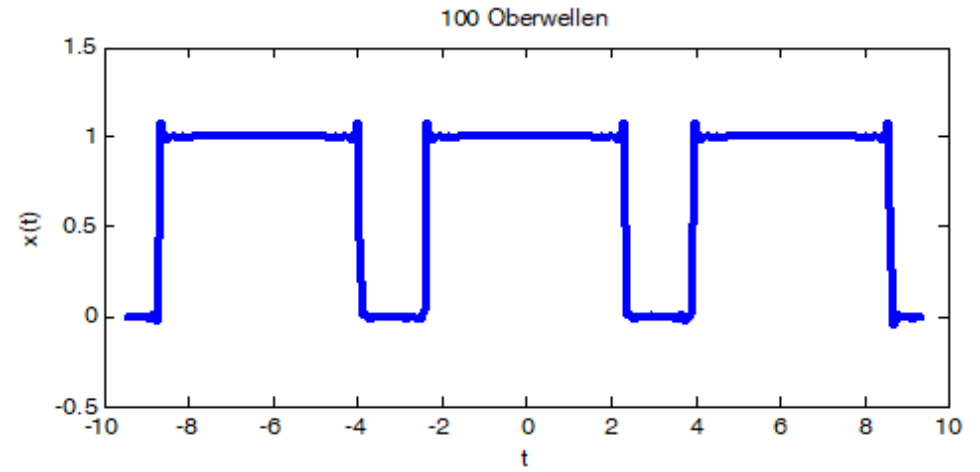
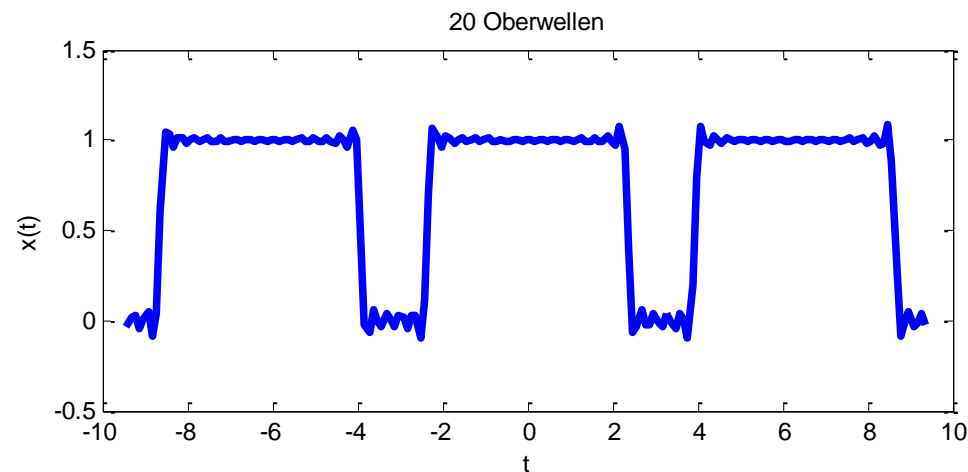
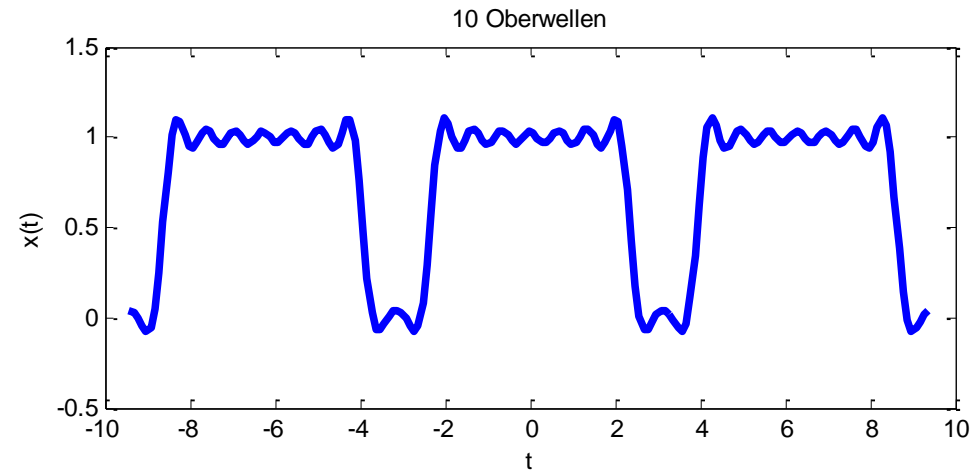
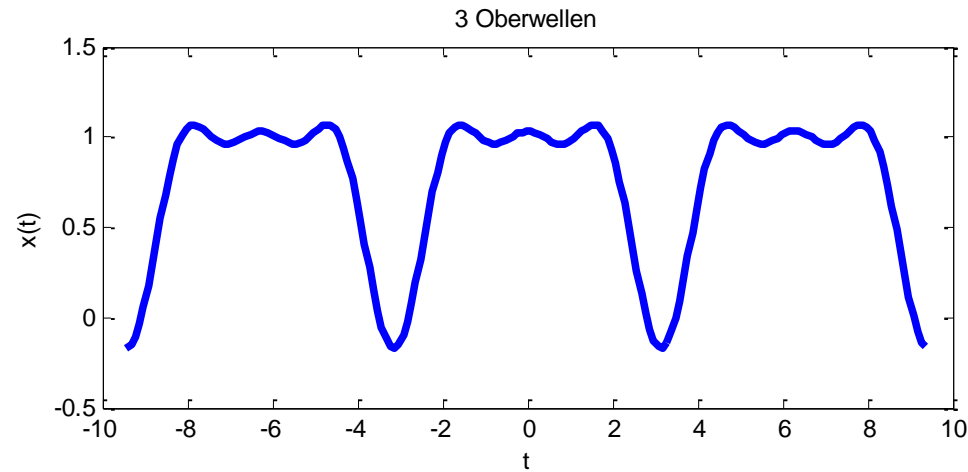
- In praktischen Anwendungen ist die Berechnung von unendlich vielen Koeffizienten nicht möglich!

$$x(t + m \cdot T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t} \rightarrow \sum_{n=-N}^N C_{n\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

mit $N < \infty$

- Daraus ergibt sich, dass eine ideale Signalrekonstruktion nicht mehr möglich ist.
 - Beispiel: Rechtecksignal

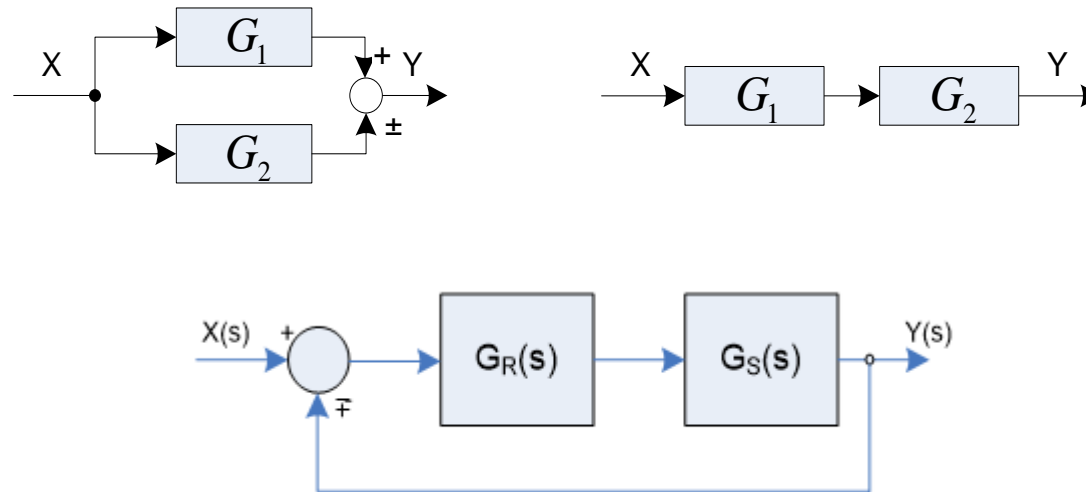
- Bei Reduktion der Anzahl der Oberwellen (= Anzahl der Fourier-Koeffizienten) ist die ursprüngliche Signalform verfälscht wiedergegeben



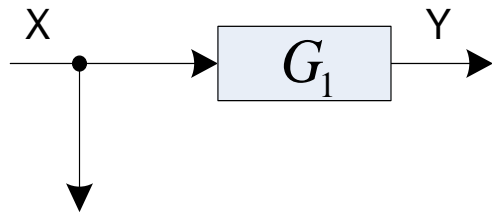
Einschub Blockschaltbildalgebra

Blockschaltbildalgebra:

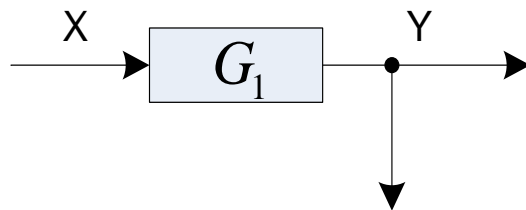
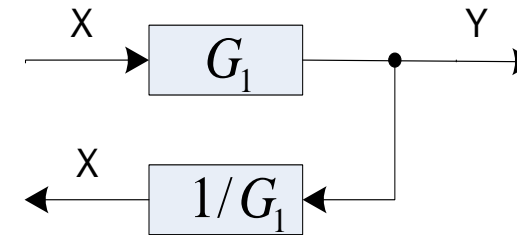
Mithilfe der sogenannten Blockschaltbildalgebra können wir unterschiedliche Übertragungsglieder zu komplexeren Gesamtsystemen zusammenfügen und zusammenfassen.



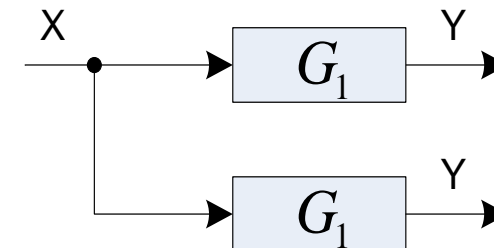
Im Folgenden werden wir die hierfür nötigen Regeln kennen lernen.



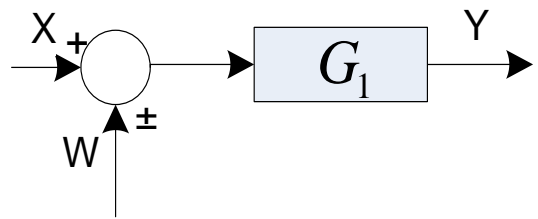
Verlegen einer
Verzweigungsstelle hinter
einen Block



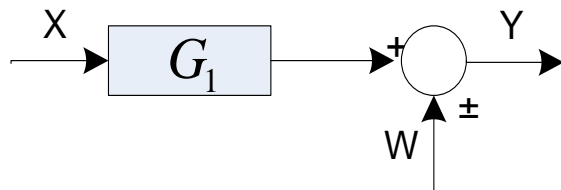
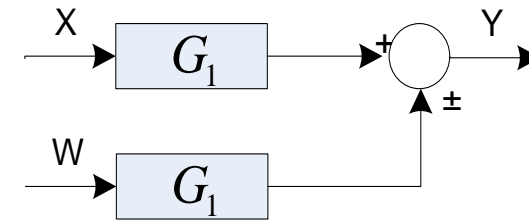
Verlegen einer
Verzweigungsstelle vor einen
Block



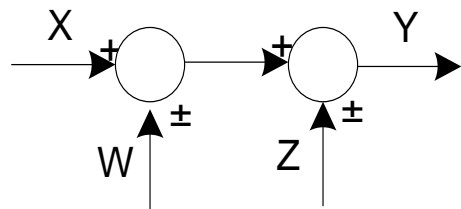
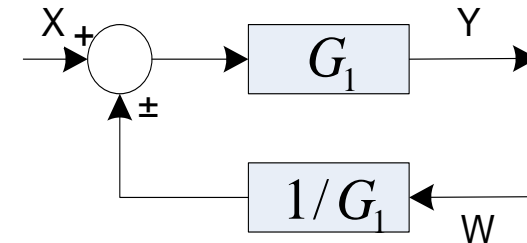
◆ Schaltungsvereinfachung bzw. Veränderungen durch Umbau des Blockschaltbildes



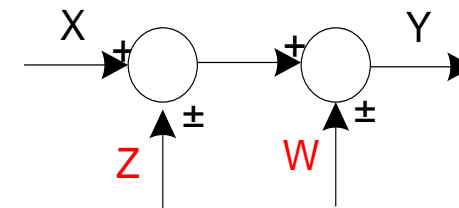
Verlegen einer Additionsstelle
hinter einen Block

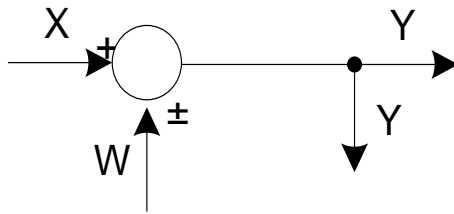


Verlegen einer Additionsstelle
vor einen Block

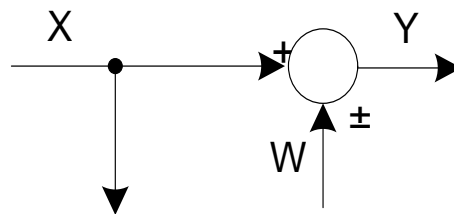
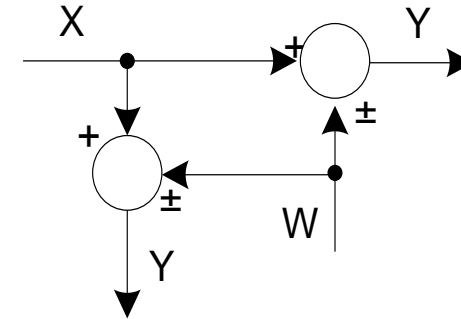


Umordnen von Additionsstellen

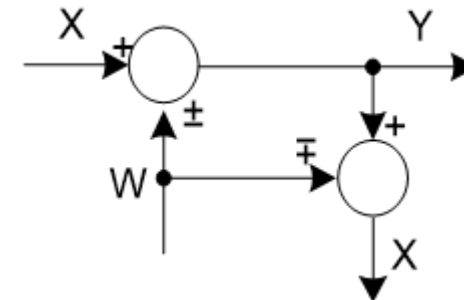




Verlegen einer
Verzweigungsstelle vor eine
Additionsstelle

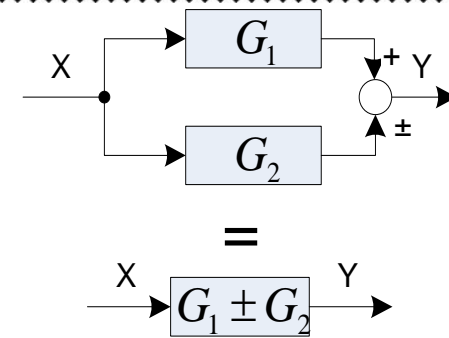


Verlegen einer
Verzweigungsstelle hinter eine
Additionsstelle



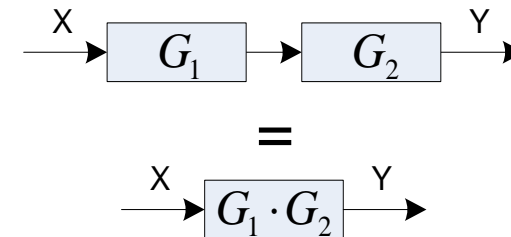
- ◆ Parallelschaltung: Addition der Frequenzgänge

$$G_{ges} = \frac{Y_{ges}}{X} = \frac{G_1 \cdot X + G_2 \cdot X + \dots}{X} \quad G_{ges} = \sum_{i=1}^n \pm G_i$$



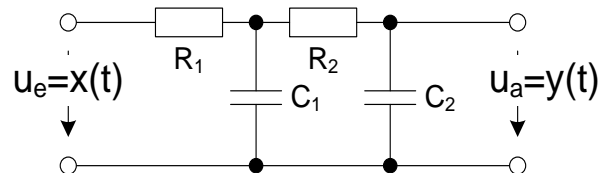
- ◆ Serienschaltung: Multiplikation der Frequenzgänge

$$G_{ges} = \frac{Y}{X} = \frac{(\dots(G_2 \cdot (G_1 \cdot X)))}{X} \quad G_{ges} = \prod_{i=1}^n G_i$$

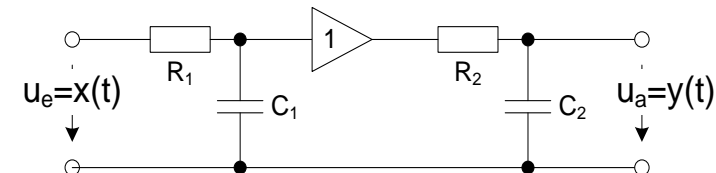


ACHTUNG: Rückwirkungsfreiheit muss garantiert sein!

$$G_{ges} \neq G_1 \cdot G_2$$

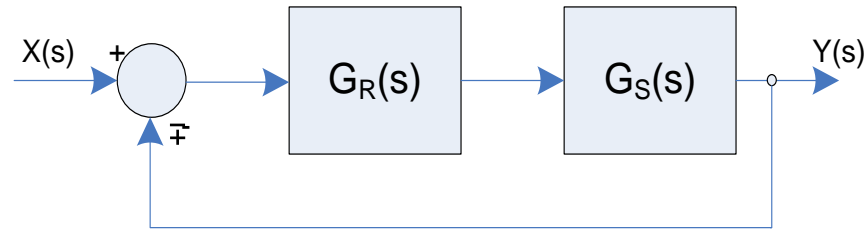


$$G_{ges} = G_1 \cdot G_2$$



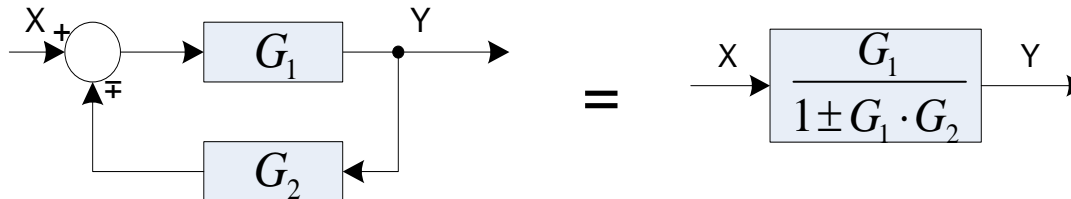
- ◆ Rückkopplung: Kombination von Addition und Parallelschaltung (Rückführschleife)

$$G = \frac{G_R \cdot G_S}{1 \pm G_R \cdot G_S}$$

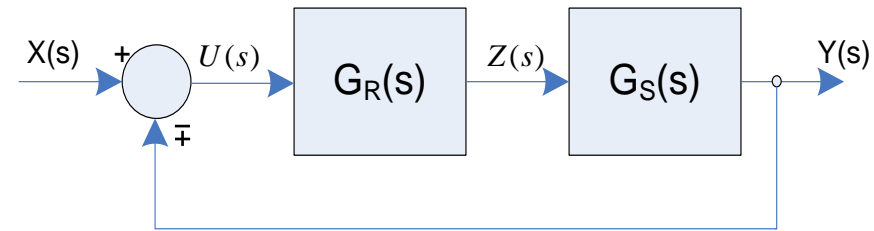


Übertragungsfunktion der offenen Strecke: $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$

$$G_{ges} = \frac{G_1}{1 \pm G_1 \cdot G_2}$$



Beispiel Regelschleife



$$U = X \mp Y$$

$$Z = U \cdot G_R$$

$$Y = Z \cdot G_S$$

$$Y = U \cdot G_R \cdot G_S = [X \mp Y] \cdot G_R \cdot G_S$$

$$Y \cdot [1 \pm G_R \cdot G_S] = X \cdot G_R \cdot G_S$$

$$G = \frac{Y}{X} = \frac{G_R \cdot G_S}{1 \pm G_R \cdot G_S} = \frac{G_0}{1 \pm G_0}$$

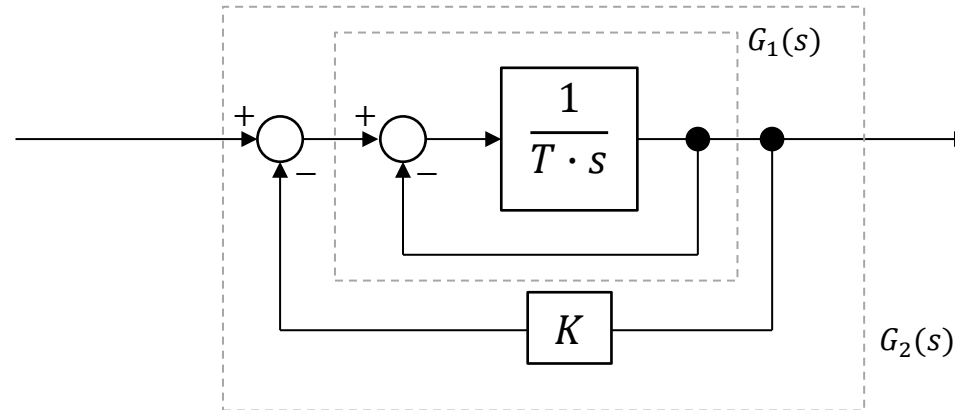
G_0 ... Übertragungsfunktion
des offenen Regelkreises

Durch entsprechende Beschaltung (Rückkopplung / Mitkopplung)
lässt sich die Übertragungsfunktion effizient beeinflussen!

Rechenbeispiele Blockschaltbildalgebra

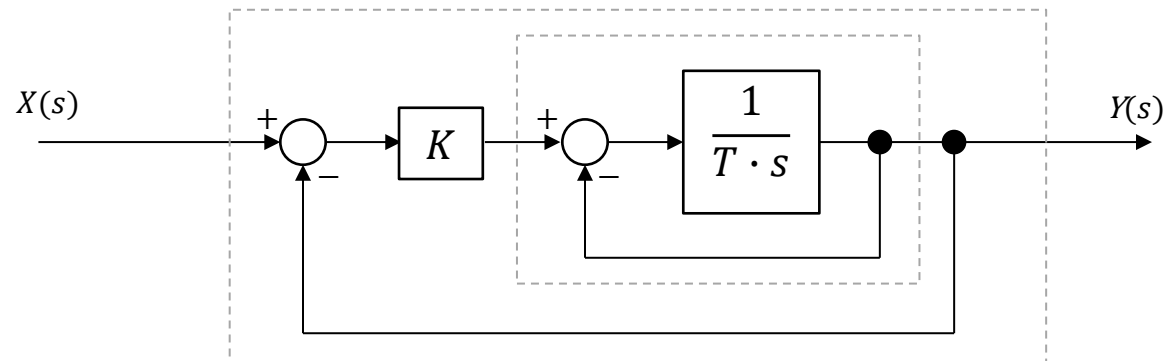
◆ Blockschaltbildalgebra

◆ Bsp. 1: Vereinfachen Sie folgendes Blockschaltbild und geben Sie $G_1(s)$ und $G_2(s)$ an:



◆ Blockschaltbildalgebra

◆ Bsp. 2: Vereinfachen Sie folgendes Blockschaltbild und geben Sie $G_1(s)$ und $G_2(s)$ an:



◆ Blockschaltbildalgebra

◆ Bsp. 3: Vereinfachen Sie folgendes Blockschaltbild:

