
FH Vorarlberg

Integraltransformation

Signale und Systeme

Foliensatz 3 – Frequenzgang/Übertragungsfunktion, Bode-Diagramm, Nyquist-Diagramm

-
- Übersicht Zeit/Frequenzbereich
 - Herleitung des Frequenzganges eines Systems
 - Frequenzgangskennlinie und Bode-Diagramm
 - Pol-/Nullstellen > Bode-Diagramm
 - Ortskurve / Nyquist-Diagramm
-

- Fourier-Reihe: $C_{n\omega_0} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$
- Fourier-Transformation: $X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$
- Laplace-Transformation: $X(s) = \int_{t=0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$

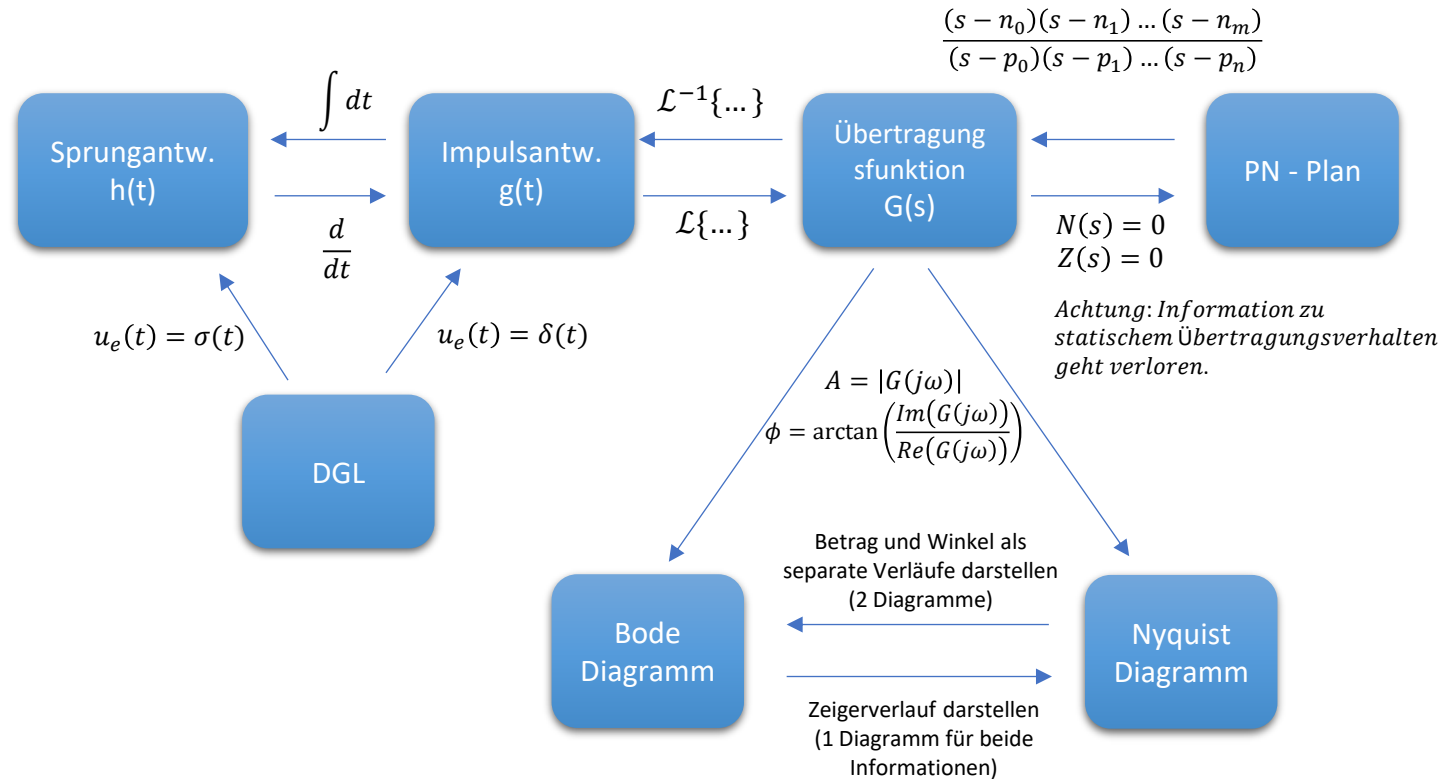
periodisch / nicht periodisch

kontinuierlich / diskret

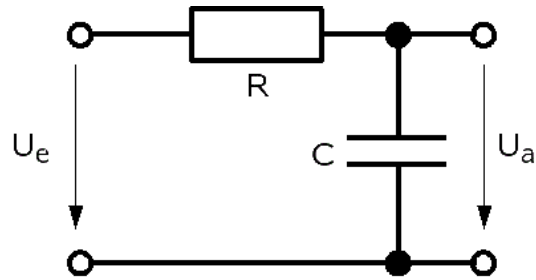
Frequenzgang / Übertragungsfunktion



Übersicht Systembeschreibungen



- Berechnung des Frequenzganges $G(j\omega)$ eines einfachen RC-Netzwerkes (PT1)



- Matlab-Plots: Übertragungsverhalten des RC-Netzwerks

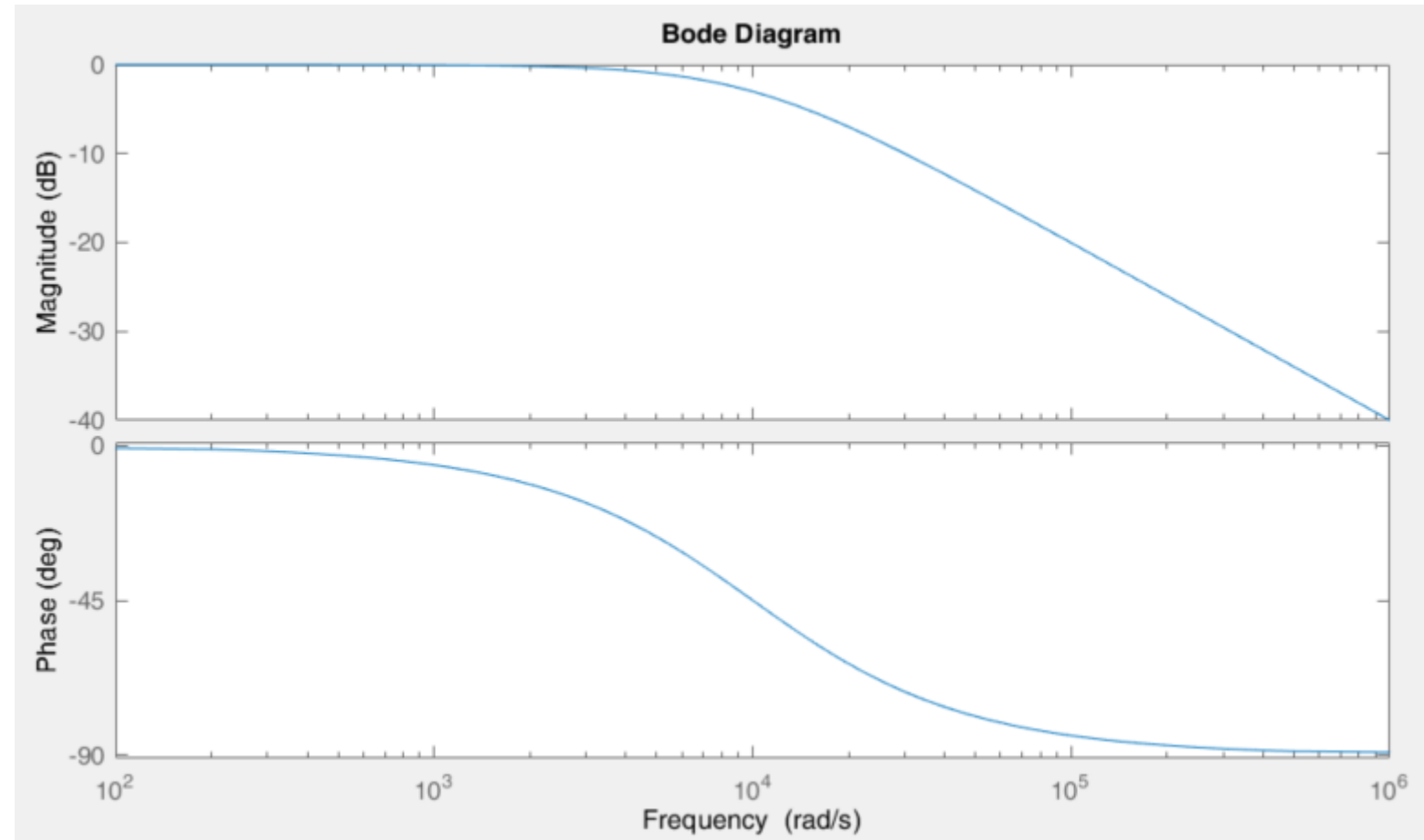
Betrag:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}(G)^2 + \operatorname{Im}(G)^2}$$

Phase:

$$\varphi(G(j\omega)) = \operatorname{atan2}\left(\frac{\operatorname{Im}(G)}{\operatorname{Re}(G)}\right)$$

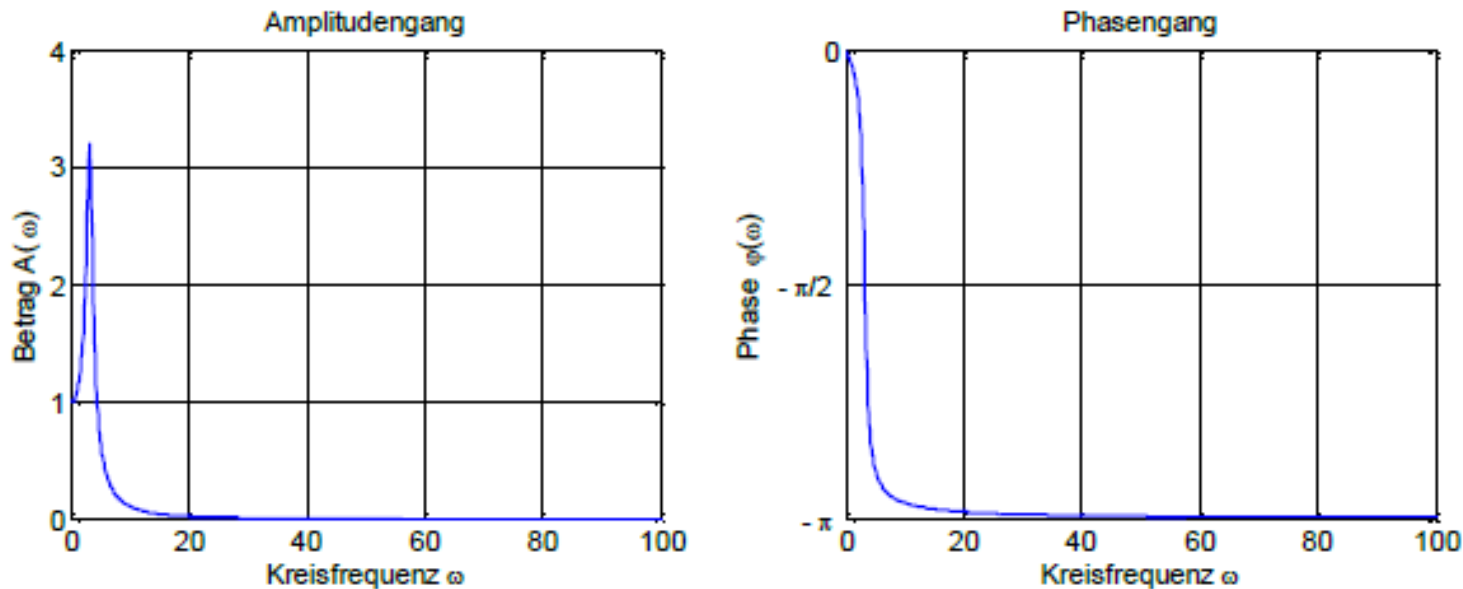
$$\begin{aligned} R &= 100\Omega \\ C &= 1\mu\text{F} \end{aligned}$$



Darstellungen Frequenzbereich

Frequenzgangskennlinie und Bode-Diagramm

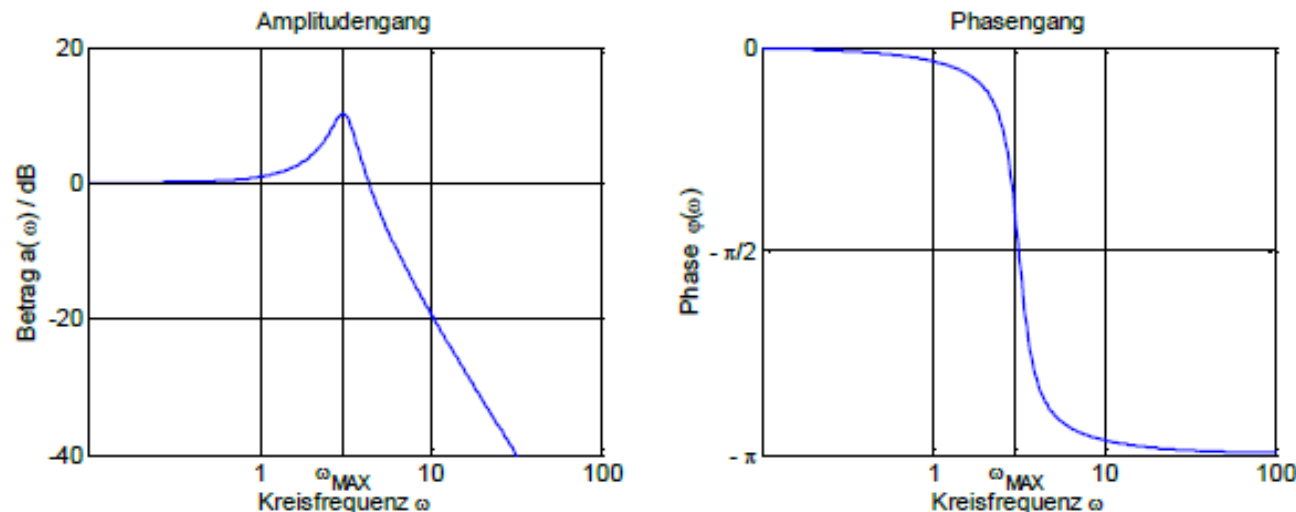
- **Frequenzgangskennlinie**: Stellt Betrag und Phase des Frequenzgangs $G(j\omega)$ separat als Funktion der Kreisfrequenz ω dar. Aufgrund der Symmetrie des Frequenzganges beschränkt sich die Darstellung zumeist auf den Frequenzbereich $\omega \geq 0$.



- **Problem**: Täuschende Darstellung: Die meisten Informationen sind **scheinbar** unterhalb 10Hz vorhanden.

- Einführung Bode-Diagramm: Prinzipiell eine Frequenzgangskennlinie, jedoch mit:
 - Logarithmisch dargestellter Frequenzachse
 - Y-Achse: Darstellung eines Maßes [dB]: Logarithmus der Ausgangsleistung durch Eingangsleistung:

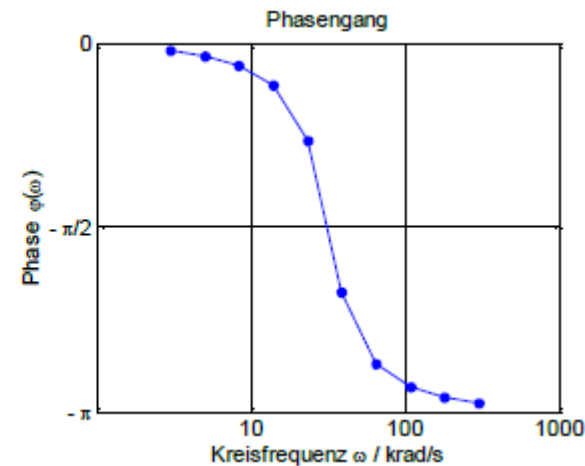
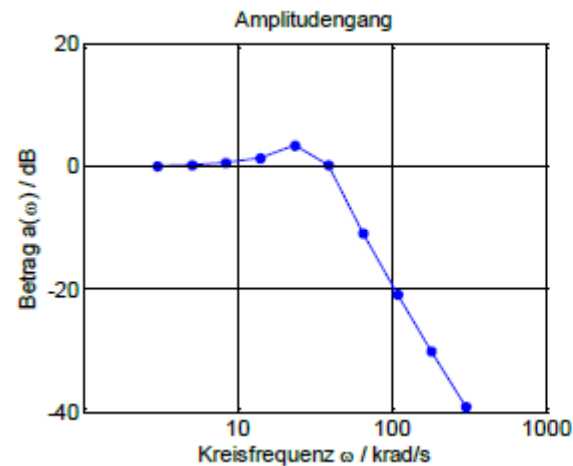
$$a(\omega)[dB] = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_a(\omega)}{P_e(\omega)} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} \right| \right) = 20 \cdot \log_{10}(A(\omega))$$



- Vorteile dieser Darstellungsform:
 - Größen mit stark unterschiedlichen Zahlenwerten können grafisch so veranschaulicht werden, dass die Ablesegenauigkeit dem jeweiligen Wert der Größe angemessen ist.
 - Darstellung führt häufig zu Geradenabschnitten → einfache Handskizzierung von Systemen
 - Aufgrund der logarithmischen Darstellung ergibt sich eine Vereinfachung in der Erstellung des Diagramms: Die Multiplikation der Linearfaktoren des Frequenzganges wird zu einer Addition

Messtechnische Ermittlung von Frequenzganges / Übertragungsfunktion

- Anregung des Systems mit $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_u)$
- LTI System reagiert auf jeden Fall mit einer harmonischen Schwingung gleicher Frequenz: $y(t) = Y_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$
 - $A(\omega_0) = \frac{Y_0}{U_0}$
 - $\varphi(\omega_0) = \varphi_y - \varphi_u = \omega_0 \cdot \Delta t$



Transformation PN-Plan → Bode-Diagramm

.....
Engineer's view:

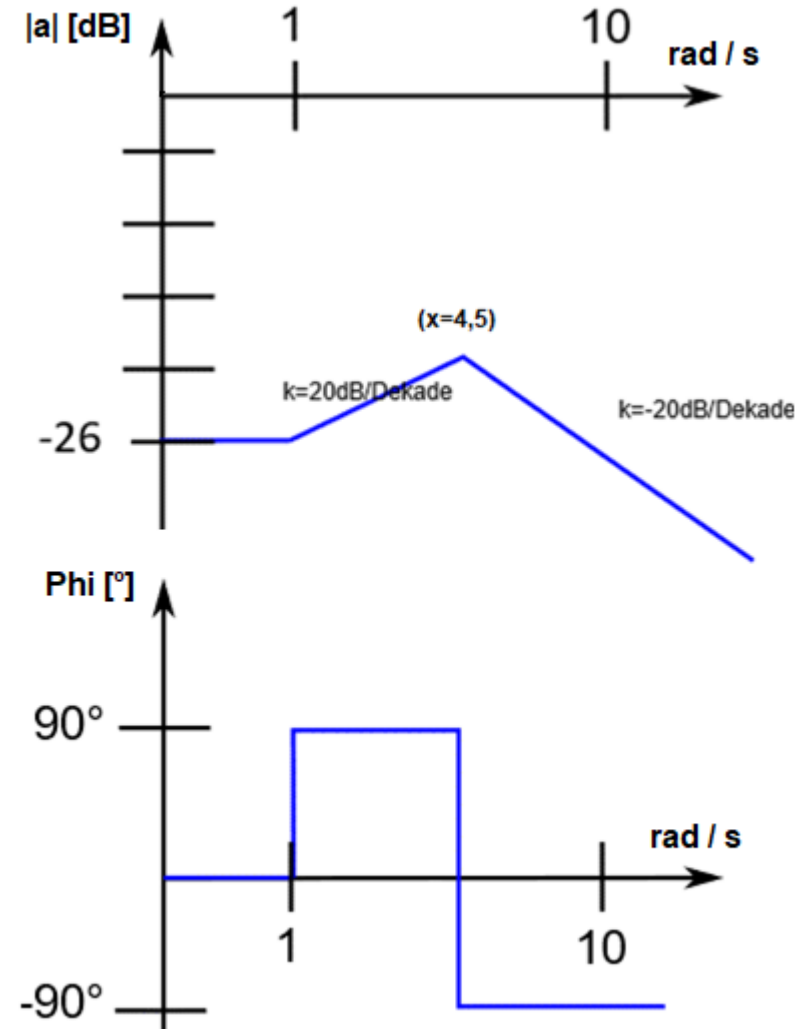
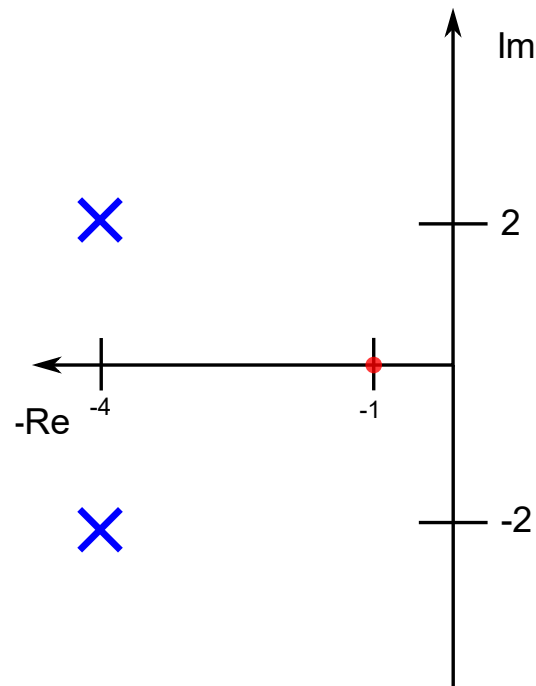
- Jede Nullstelle **erhöht (+)**
 - die Steigung des Amplitudenganges um 20dB / Dekade
 - den Phasengang um 90°
- Jede Polstelle **verringert (-)**
 - die Steigung des Amplitudenganges um 20dB / Dekade
 - den Phasengang um 90°
- **Der Betrag der Null/Polstelle ergibt die Frequenz, an welcher die Änderung eintritt**

Beispiel: $G(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+20}$

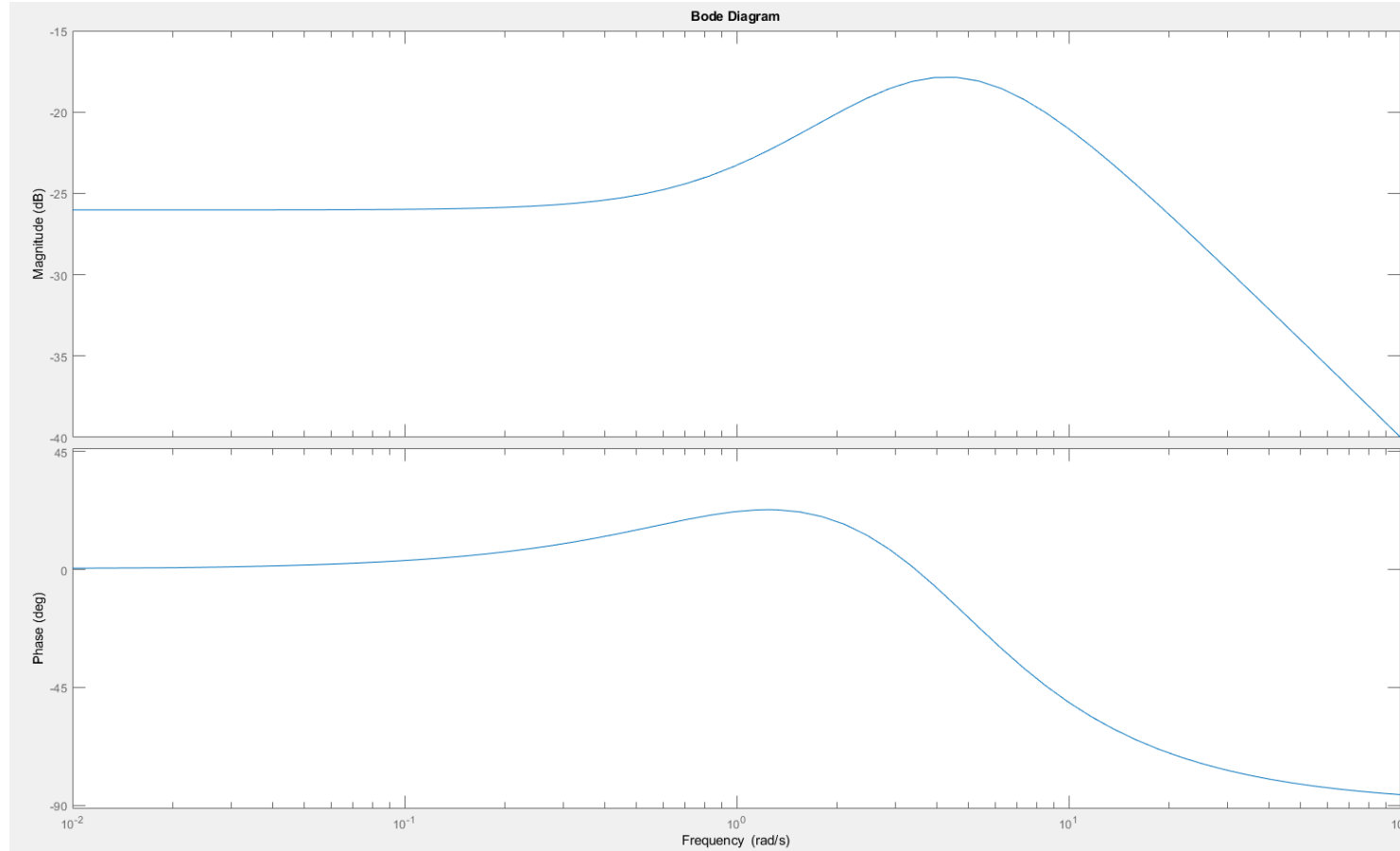
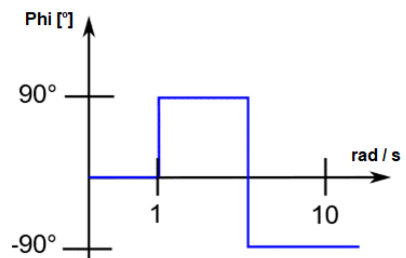
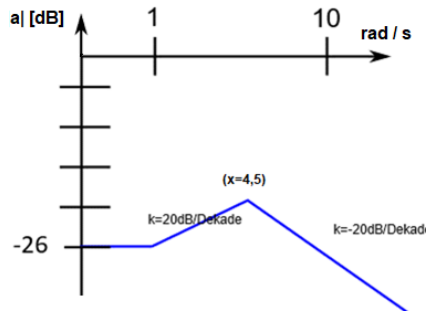
Nullstelle bei: -1

Polstelle bei: $-4 \pm j2$

Amplitude für $\omega = 0$: $\frac{1}{(20)} = 0.05 = -26\text{dB}$



- Matlab Plot der obigen Übung



Gegeben ist folgendes System:
$$G(s) = \frac{(s + 10^6)(s^2 + 5600s + 10^8)}{(s + 1)(s + 100)(s + 10^8)^2}$$

- Zeichnen Sie den PN-Plan des Systems (händisch)
- Ausgehend vom PN-Plan, skizzieren Sie grob den Amplituden und Phasengang des Systems
- Kontrolle Matlab (Optional, Befehle: „tf“, „zpk“, „bode“)
 - Plotten Sie den PN-Plan mit Matlab
 - Plotten Sie das System mit Matlab und Vergleichen Sie die Ergebnisse

Gegeben sind folgende Systeme:

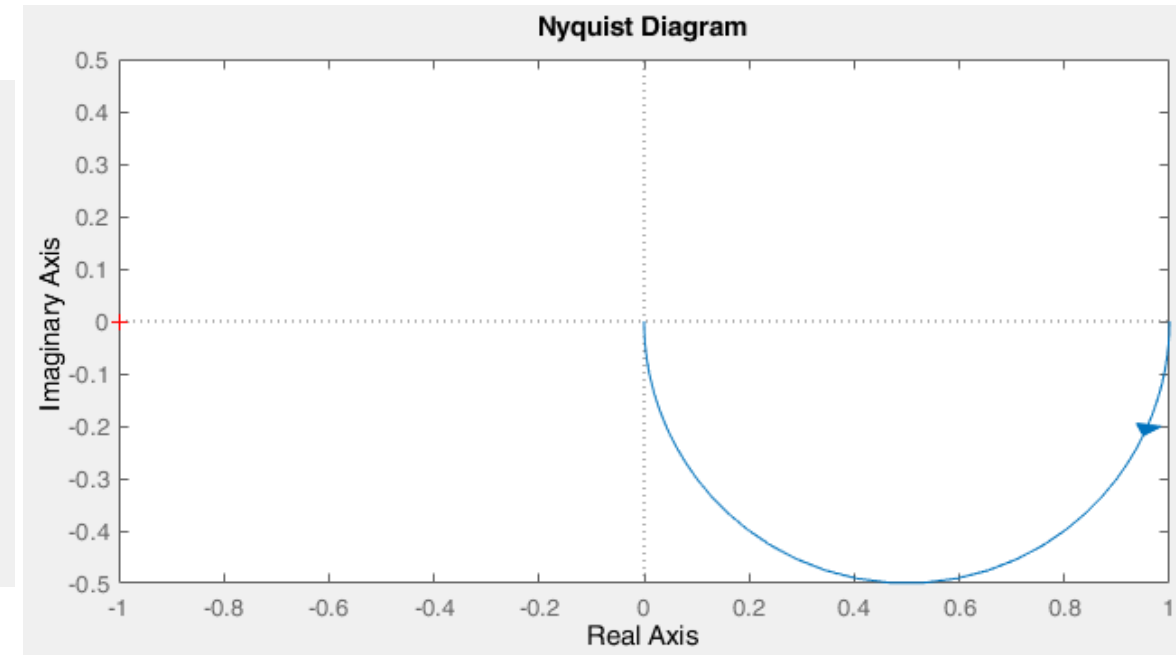
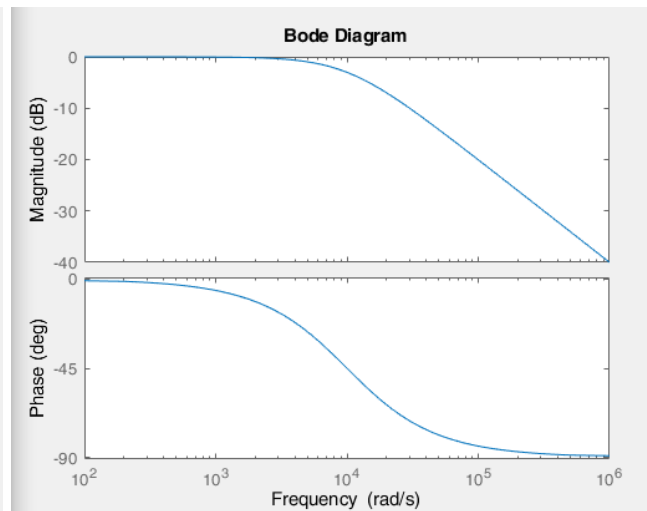
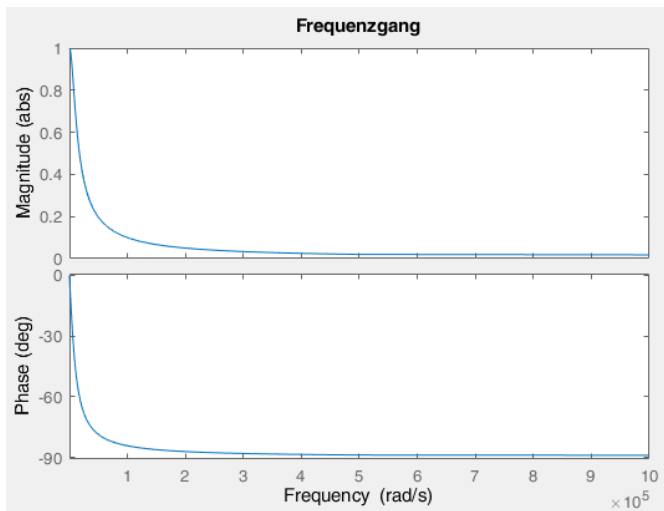
$$P_1(s) = \frac{10}{s} \quad P_2(s) = \frac{1}{5} \frac{s - 200}{(s + 2)(s - 20)} \quad P_3(s) = \frac{-10(s + 1)}{s + 10}$$
$$P_4(s) = \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s + 10)} \quad P_5(s) = \frac{100(s + 0.1)}{s(s + 1)(s + 100)}$$

- Zeichnen Sie den PN-Plan des Systems (händisch)
- Ausgehend vom PN-Plan, skizzieren Sie grob den Amplituden und Phasengang des Systems
- Kontrolle Matlab (Optional, Befehle: „tf“, „zpk“, „bode“)
 - Plotten Sie den PN-Plan mit Matlab
 - Plotten Sie das System mit Matlab und vergleichen Sie die Ergebnisse

Darstellungen Frequenzbereich

Ortskurve / Nyquist-Diagramm

- Der komplexe Frequenzgang $G(j\omega)$ besteht in Polarkoordinaten-Form aus Betrag $A(\omega)$ und Phase $\varphi(\omega)$: $G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$
 - $A(\omega)$ kann als Länge eines Zeigers auf der komplexen Ebene interpretiert werden
 - $\varphi(\omega)$ entspricht dem Winkel dieses Zeigers gegen die reelle Achse
 - Für verschiedene ω ergeben sich nun verschiedene Punkte in der komplexen Ebene
→ die Ortskurve kann so skizziert werden



- **Problem**: Die Frequenzinformation geht verloren. Es kann nur eine vage Aussage über das Verhalten bei sehr hohen und sehr kleinen Frequenzen getroffen werden.
 - Beispiel: Für kleine Frequenzen wird der Betrag mit zunehmender Frequenz etwas erhöht und nimmt gegen $\omega \rightarrow \infty$ ab bis hin zu 0.
 - Die Phase beginnt mit kleinen $\omega \rightarrow 0$ bei 0° und steigert sich für $\omega \rightarrow \infty$ auf -90° .
- **Chancen**:
 - Darstellung des gesamten Frequenzganges von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$
 - Darstellung von Amplitude und Phase in einer Kurve
 - Stabilitätsbestimmung eines Systems / Regelkreise (Nyquist Kriterium)