

Integraltransformationen

Diskrete Transformationen

Dr.-Ing. Steffen Finck

Inhalt

① Z-Transformation

② Transformationssätze

③ Diskrete Fouriertransformation

Diskrete Signale

Neben kontinuierlichen Signalen existieren (zeit- und wertdiskrete) Signale. Wie können diese in einen Bildraum (zur Vereinfachung der Problemlösung) transformiert werden?

Schritt 1: Überführung in eine kontinuierliche Funktion mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion

$$f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(t - n\Delta T)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ als Nummer des Abtastschrittes, $\Delta T > 0$ - als Abtastintervall und $f_n \in \mathbb{R}$ als Funktionswert des n -ten Abtastschritt

für kausale Signale gilt entsprechend $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n\Delta T)$

Diskrete Signale

Schritt 2: Anwendung der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n\Delta T)\right\} &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n\Delta T)\right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - n\Delta T) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-sn\Delta T} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{f_n\}\end{aligned}\quad (1)$$

mit $z = e^{s\Delta T}$

Gleichung (1) ist die **Z-Transformation** für die diskrete Funktion f_n

Eigenschaften der Z-Transformation

- z ist die, im allgemeinen komplexwertige, unabhängige Variable der ZT
- f_n ist eine (unendliche) **Folge**, z.B. $f_0 = 1, f_1 = 2, \dots$
- $\mathcal{Z}\{f_n\}$ ist eine (unendliche) **Reihe**, z.B. $1 + 2 + \dots$
- für die Bestimmung der ZT ist ΔT **nicht** von Interesse
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ ist eine **Potenzreihe** für $\frac{1}{z}$
- Spezialfall einer Potenzreihe ist die **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=0}^N y^n = \frac{1 - y^{N+1}}{1 - y} \quad \text{für } y \neq 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1 - y} \quad \text{für } |y| < 1$$

Eigenschaften der Z-Transformation

- $z = 0$: singulärer Punkt, ZT ist nicht definiert
- $|z| > r$: Potenzreihe konvergiert, $r \in \mathbb{R}$ ist der Konvergenzradius, ZT ist **eindeutig**
- mit $s = \sigma + j\omega$ ergibt sich

$$z = e^{\sigma\Delta T} e^{j\omega\Delta T} = e^{\sigma\Delta T} [\cos(\omega\Delta T) + j \sin(\omega\Delta T)]$$

- $\sigma = 0$: Abbildung auf den Einheitskreis der z-Ebene
- $\sigma > 0$: Abbildung außerhalb des Einheitskreises
- $\sigma < 0$: Abbildung innerhalb des Einheitskreises

Was ändert sich?

Eigentlich nicht viel,

- Spungfunktion und Diracsche Deltafunktion können wir einfach diskretisieren
- wir haben noch entsprechende Transformationssätze
- es existieren Tabellen für die entsprechenden Korrespondenzen
- aber anstatt mit Funktionen wird stärker mit Reihen und Folgen gearbeitet
- und anstatt mit Integralen mit entsprechenden Summen

Beispiel: Sprungfunktion

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

ZT für σ_n

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\sigma_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \text{unendl. geom. Reihe} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1 \end{aligned}$$

Beispiel: Sprungfunktion

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

ZT für Sprungfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\sigma_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \text{unendl. geom. Reihe} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1 \end{aligned}$$

Beispiel: weitere Beispiele

ZT für Diracschen Impuls:

$$\mathcal{Z}\{\delta_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} = 1 \quad \text{für} \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

ZT für Exponentialfolge $f_n = a^n \sigma_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sigma_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \text{unendl. geom. Reihe} = \frac{z}{z-a} \quad \text{für} \quad |z| > a \end{aligned}$$

Beispiel: weitere Beispiele

ZT für diskreter Rechteckimpuls $f_n = \sigma_n - \sigma_{n-k}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-k}) z^{-n} = \sum_{n=0}^{k-1} z^{-n} \\ &= \text{endl. geom. Reihe} = \frac{z - z^k}{z - 1} \quad \text{für } |z| \neq 1\end{aligned}$$

ZT für Kosinus $f_n = \cos(\omega_0 n \Delta T)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(e^{jn\omega_0 \Delta T} + e^{-jn\omega_0 \Delta T} \right) z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 \Delta T}}{z} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-j\omega_0 \Delta T}}{z} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0 \Delta T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 \Delta T}} \right) \\ &= \frac{z(z - \cos(\omega_0 \Delta T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 \Delta T) + 1} \quad \text{für } |z| > |e^{\pm j\omega_0 \Delta T}| = 1\end{aligned}$$

Rücktransformation

Neben Korrespondenztabelle können folgende Formeln für die Rücktransformation benutzt werden

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_{(C)} F(z) z^{n-1} dz \quad (2)$$

$$f_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F(z^{-1})}{dz^n} \right|_{z=0} \quad (3)$$

Inhalt

① Z-Transformation

② Transformationssätze

③ Diskrete Fouriertransformation

Transformationen - Linearität

$$f_n = \alpha g_n + \beta k_n$$

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha g_n + \beta k_n) z^{-n}$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^{-n}$$

$$= \alpha \mathcal{Z}\{g_n\} + \beta \mathcal{Z}\{k_n\} \quad (4)$$

Transformationen - Verschiebung

Verschiebung nach rechts um $k > 0$ Einheiten

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} f_m z^{-(k+m)} = z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} f_m z^{-m} \\ &= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m} = z^{-k} \mathcal{Z}\{f_n\} \quad \text{für kausale Folgen mit } f_n = 0 \text{ für } n < 0\end{aligned}\tag{5}$$

Verschiebung nach links um $k > 0$ Einheiten

$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k \left[\mathcal{Z}\{f_n\} - \sum_{h=0}^{k-1} f_h z^{-h} \right]\tag{6}$$

Transformationen - Dämpfung

ist die hier die Multiplikation mit einer Potenzfolge, d.h. $a^{\pm n} f_n$

Dämpfung mit a^{-n}

$$\mathcal{Z}\{a^{-n} f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (a \cdot z)^{-n} = \mathcal{Z}_{(az)}\{f_n\} \quad \text{für } |az| > 1 \quad (7)$$

Dämpfung mit a^n

$$\mathcal{Z}\{a^n f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n f_n z^{-n} = \dots = \mathcal{Z}_{\left(\frac{z}{a}\right)}\{f_n\} \quad \text{für } \left|\frac{z}{a}\right| > 1 \quad (8)$$

Transformationen - Summen

Übergang von einer Folge zu einer Reihe als Signal, d.h.

$$g_k = \sum_{n=0}^k f_n$$

- aus der Definition ergibt sich

$$f_k = g_k - g_{k-1}$$

- mit Linearität und Verschiebung ergibt sich

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \mathcal{Z}\{g_k\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{g_k\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{g_k\}$$

- damit gilt:

$$\mathcal{Z}\{g_k\} = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\{f_n\} \quad (9)$$

Transformationen - Multiplikation von Folgen

Darstellung einer Folge als Produkt zweier Folgen, d.h.

$$g_n = n f_n$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{g_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n f_n z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} f_n n z^{-n-1} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(-\frac{d}{dz} z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= -z \frac{d\mathcal{Z}\{f_n\}}{dz}\end{aligned}\tag{10}$$

Transformationen - Differenzen

Differenzen von Folgen verschiedener Ordnung

Differenz 1. Ordnung $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$

Differenz 2. Ordnung $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$

Differenz k-ter Ordnung $\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n$

Differenzen treten in **Differenzengleichungen** auf, dem diskreten Äquivalent zu den Differentialgleichungen. Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} \mapsto \frac{\Delta x_n}{\Delta T} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta T}$$

Transformationen - Differenzen

Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{m-i} = \sum_{i=0}^h \beta_i f_{m-i} \quad (11)$$

Beispiel:

$$x_k + 0.2x_{k-1} = 0.5g_k \quad \text{für } k = 0 \text{ und } x_{-1} = 0$$

gesucht ist die Folge des Ausgangssignals x_k für die Folge des gegebenen Eingangssignals g_k

Transformationen - Differenzen

Differenzensatz - Differenz 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\Delta f_n\} &= \mathcal{Z}\{f_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{f_n\} \\ &= z \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_0 \right] - \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= (z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - z f_0 = (z - 1) \mathcal{Z}\{f_n\} - z f_0\end{aligned}\quad (12)$$

Differenzensatz - Differenz k-ter Ordnung

$$\mathcal{Z}\{\Delta^k f_n\} = (z - 1)^k \mathcal{Z}\{f_n\} - z \sum_{h=0}^{k-1} (z - 1)^{k-1-h} \Delta^h f_0 \quad (13)$$

Transformationen - Differenzen

Es wird zwischen **Vorwärtsdifferenzen**

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$$

und **Rückwärtsdifferenzen**

$$\tilde{\Delta} f_n = f_n - f_{n-1}$$

unterschieden.

Für die Rückwärtsdifferenz gilt

$$\mathcal{Z}\{\tilde{\Delta} f_n\} = \mathcal{Z}\{f_n\} - z^{-1} \mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{f_n\} \quad (14)$$

Transformationen - Faltung

Die Faltung zweier Folgen ist definiert als

$$f_n * g_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \quad (15)$$

Analog zu LT und FT gilt

$$\mathcal{Z}\{f_n * g_n\} = \mathcal{Z}\{f_n\} \cdot \mathcal{Z}\{g_n\} \quad (16)$$

Anmerkung: Zur Umformung wird die **Cauchy-Produktformel** angewandt

Transformation - Grenzwertsätze

Wie bei der LT, können Anfangswerte und stationäres Verhalten der Folgen aus der Z-Transformierten bestimmt werden

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}\{f_n\} = f_0 \quad (17)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} (z - 1) \mathcal{Z}\{f_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (18)$$

Inhalt

① Z-Transformation

② Transformationssätze

③ Diskrete Fouriertransformation

Diskrete FT

- Problemstellung: Spektralanalyse einer diskreten Funktion
- Ansatz: “Diskretisierung” der Fourier-Reihe

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{jnx_k}$$

mit f_k als Funktionswerte an den Abtaststellen x_k und c_n als Koeffizienten

- Bestimmung der Koeffizienten durch

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnx_k}$$

Diskrete FT

Das **Frequenzspektrum** ergibt sich als

$$s_n = Nc_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jn x_k} = \mathbf{F}_N \mathbf{f} \quad (19)$$

mit

$$\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]^T$$

und

$$\mathbf{F}_N = [e_{nk}] = [e^{-jn x_k}] \quad \text{und} \quad x_k = \frac{2\pi k}{N}$$

Voraussetzung: Betrachtung der diskreten Folge im Zeitbereich als periodisches Signal

Schnelle FT - FFT

typischerweise ist N sehr groß

- hoher Rechenaufwand der DFT $\mathcal{O}(N^2)$
- durch Ausnutzung von Symmetrien und iterativer Berechnungsweise kann der Aufwand auf $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ reduziert werden
- dies ist die **Fast Fourier Transform** (FFT)
- durch die effiziente Berechnung von großen Systeme findet die FFT Anwendung in weiteren Gebieten (Finanzmathematik, Telekommunikation, Messtechnik, Numerik, ...)