

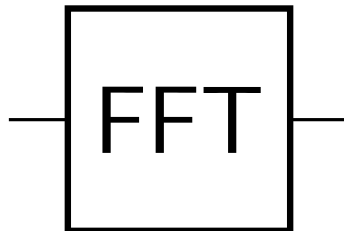


FACHHOCHSCHULE VORARLBERG  
VORARLBERG UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

FACHBEREICH TECHNIK  
ELEKTRONIK UND INFORMATIONSTECHNOLOGIE DUAL

# Diskrete Transformationen

## Integraltransformationen



Dokumentation mit  $\text{\LaTeX}$

<b>Kennziffer</b>	024506031004
<b>Name</b>	PREINDL Laurenz
<b>Betreuer</b>	FINCK Steffen, Dr.-Ing.
<b>Datum</b>	5. Dezember 2024

## Inhaltsverzeichnis

1	Übungsblatt 3	1
1.1	Z-Transformationen . . . . .	1



# 1 Übungsblatt 3

## 1.1 Z-Transformationen

Bestimme die Rücktransformation in den Originalbereich.

$$3. X(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z+2)(z-1)}$$

### • Variante 1

– Partialbruchzerlegung mit  $\frac{X(z)}{z}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{z(z+2)(z-1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z+2} + \frac{A_3}{z-1}$$

$$z = 0 \quad 2 \cdot 0^2 + 1 = A_1 \cdot (0+2)(0-1) \quad A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$z = -2 \quad 2 \cdot (-2)^2 + 1 = A_2 \cdot (-2)(-2-1) \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

$$z = 1 \quad 2 \cdot 1^2 + 1 = A_3 \cdot (1)(1+2) \quad A_3 = 1$$

– Multiplikation mit  $z$

$$\begin{aligned} X(z) &= A_1 + A_2 \cdot \frac{z}{z+2} + A_3 \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{z+2} + \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

– Rücktransformation  $f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$  mit Tabelle

$$\begin{aligned} f_n &= -\frac{1}{2} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\{1\} + \frac{3}{2} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \delta_n + \frac{3}{2} \cdot (-2)^n \cdot \sigma_n + (1)^n \cdot \sigma_n \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \delta_n + \left[\frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1\right] \cdot \sigma_n \end{aligned}$$

### • Variante 2

– Polynomdivision

$$X(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z+2)(z-1)} = \frac{2z^2 + 1}{z^2 + z - 2}$$

$$\begin{array}{r} (2z^2 \quad \quad +1) : (z^2 + z - 2) = 2 + \frac{-2z + 5}{(z+2)(z-1)} \\ \text{Rest: } \frac{-2z^2 \quad -2z \quad +4}{-2z \quad +5} \end{array}$$

- Partialbruchzerlegung des zweiten Terms

$$\frac{-2z + 5}{(z + 2)(z - 1)} = \frac{A_1}{z + 2} + \frac{A_2}{z - 1}$$

$$\begin{array}{lll} z = -2 & -2 \cdot (-2) + 5 = A_1 \cdot (-2 - 1) & A_1 = -3 \\ z = 1 & -2 \cdot 1 + 5 = A_2 \cdot (1 + 2) & A_2 = 1 \end{array}$$

- Einsetzen in das Ergebnis der Polynomdivision

$$X(z) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{z + 2} + \frac{1}{z - 1}$$

- Rücktransformation  $f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$  mit Tabelle

$$\begin{aligned} f_n &= 2 \cdot \mathcal{Z}^{-1}\{1\} - 3 \cdot \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z + 2}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z - 1}\right\} \\ &= 2 \cdot \delta_n - 3 \cdot (-2)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} + (1)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \\ &= 2 \cdot \delta_n + \left[\frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1\right] \cdot \sigma_{n-1} \\ &= \underline{\underline{2 \cdot \delta_n + \left[\frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1\right] \cdot \sigma_{n-1}}} \end{aligned}$$

• **Vergleich der Varianten für  $n \geq 0$**

- Variante 1

$$\begin{aligned} f_n &= -\frac{1}{2} \cdot \delta_n + \left[\frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1\right] \cdot \sigma_n \\ f_0 &= -\frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2} + 1\right] = 2 \\ f_n|_{n>0} &= \frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1 \end{aligned}$$

- Variante 2

$$\begin{aligned} f_n &= 2 \cdot \delta_n + \left[\frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1\right] \cdot \sigma_{n-1} \\ f_0 &= 2 \\ f_n|_{n>0} &= \frac{3}{2} \cdot (-2)^n + 1 \end{aligned}$$

- Umformen der Varianten

In Variante 2 wirkt der zweite Term erst ab  $n > 0$ , der erste Term wirkt in beiden Varianten nur bei  $n = 0$ . Um von Variante 1 auf Variante 2 zu kommen, wird  $\sigma_n \rightarrow \sigma_{n-1}$ , dafür muss jedoch der zweite Term (mit  $n = 0$ ) multipliziert mit  $\delta_n$  nochmals addiert werden. Um von Variante 2 auf Variante 1 zu kommen, wird  $\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n$  und der zweite Term (mit  $n = 0$ ) multipliziert mit  $\delta_n$  wird subtrahiert. **Somit handelt es sich in beiden Fällen um die gleiche Lösung.**