

Lösungen zum 5. Seminar am 23.10.2024

1. Aus einer Lieferung von 250 Präzisionsteilen werden 10 willkürlich entnommen, um sie dann einer Qualitätsprüfung (gut/schlecht) zu unterziehen.
Vom Hersteller wird bekannterweise ein Anteil von 1% schlechter Teile angegeben. Dieser ist auch für diese Lieferung zu unterstellen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Stichprobe

- (a) kein
- (b) mindestens ein

defektes Teil enthält.

LSG.:

Für die Zufallsvariable X =Anzahl der defekten Teile, liegt eine hypergeometrische Verteilung vor mit

$M=2,5$; $N=250$; $n=10$

$$(a) \ P(X = 0) = \frac{\binom{M}{0} \binom{N-M}{n-M}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{0,5}{0} \binom{250-2,5}{10-2,5}}{\binom{250}{10}} = 0,9027$$
$$(b) \ P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9027 = 0,0973$$

2. Im Laufe eines Jahres werden von 52 aufeinanderfolgenden Ausgaben einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift 11 beliebige Ausgaben mit einer bestimmten Annonce versehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leser von 20 beliebigen (aber verschiedenen) Ausgaben

- (a) zwei Ausgaben
- (b) keine Ausgabe
- (c) 20 Ausgaben
- (d) sämtliche 11 Ausgaben
- (e) mindestens eine Ausgabe

mit einer Annonce erhält?

LSG.:

X ... Anzahl der Zeitschriften mit der Annonce. X ist hypergeometrisch verteilt $H(M=11, N=52, n=20)$

$$(a) \ P(X = 2) = \frac{\binom{11}{2} \binom{41}{18}}{\binom{52}{20}} \approx 0,088$$
$$(b) \ P(X = 0) = \frac{\binom{11}{0} \binom{41}{20}}{\binom{52}{20}} \approx 0,002$$

(c) 20 Ausgaben nicht möglich, also $P(X=20)=0$

$$(d) P(X = 11) = \frac{\binom{11}{11} \binom{41}{9}}{\binom{52}{20}} \approx 0$$

$$(e) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,998$$

3. In einer Kleinstadt fällt durchschnittlich alle fünf Jahre Hagel.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hagelt es in einem Jahr zwei Mal?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hagelt es in innerhalb von zwei Jahren genau ein Mal?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt innerhalb der nächsten vier Jahre kein Hagel?

LSG.:

- (a) X zähle die Hagelereignisse pro Jahr. X ist poissonverteilt mit $\lambda = 0,2$
Gesucht $P(X = 2) = 0,0164$
- (b) Y zähle die Hagelereignisse in 2 Jahren. Y ist poissonverteilt mit $\lambda = 0,4$
Gesucht $P(Y = 1) = 0,2681$
- (c) Z zähle die Hagelereignisse in 4 Jahren. Z ist poissonverteilt mit $\lambda = 0,8$
Gesucht $P(Z = 0) = 0,4493$

4. Für eine Speicherzelle ist die Anzahl X der Betriebsstunden bis zum Auftreten des ersten Fehlers exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 10^{-6}$.

- (a) Wie groß ist die mittlere Zeitdauer bis zum Auftreten des ersten Fehlers?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der erste Fehler innerhalb von 10^6 Betriebsstunden auf?

LSG.:

- (a) Die mittlere Anzahl Betriebsstunden bis zum Auftreten des ersten Fehlers ist $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} = 10^6$
- (b) Wahrscheinlichkeit, daß der erste Fehler innerhalb von 10^6 Betriebsstunden auftritt:
 $P(X \leq 10^6) = \text{expcdf}(10^6, 10^6) = 0,6321$

5. Eine Zufallsvariable X sei exponentialverteilt, d.h. die Dichtefunktion lautet:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ für } t \geq 0.$$

Berechnen Sie den Median $Q_{0,5}$.

LSG.:

$$\text{Gesucht } q = Q_{0,5} \text{ mit } 0,5 = \int_0^q \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^q = -e^{-\lambda q} + e^0 = 1 - e^{-\lambda q} \implies$$

$$e^{-\lambda q} = \frac{1}{2} \implies e^{\lambda q} = 2 \implies \lambda q = \ln(2) \implies q = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\text{Der Median lautet: } Q_{0,5} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

6. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 15$ und $\sigma = 5$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 20 und 25 liegt.

LSG.:

Gesucht ist

$$P(20 \leq X \leq 25) = \text{normcdf}(25, 15, 5) - \text{normcdf}(20, 15, 5) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$$

7. Die Analyse der Tagesumsätze mittlerer und kleiner Lebensmittelgeschäfte ergab, dass der Tagesumsatz X (Angaben in €) dieser Geschäfte als eine normalverteilte Zufallsvariable aufgefasst werden kann, wobei $\mu = 2000$ und $\sigma^2 = 400^2$ gilt

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Tagesumsatz 2500 € übersteigt?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Tagesumsatz zwischen 1600 und 1900 Euro liegt?
- (c) Ermitteln Sie das obere Umsatzquartil
- (d) Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Bereich, in dem der Tagesumsatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

LSG.:

- (a) Da X normalverteilt ist gilt:

$$P(X > 2500) = 1 - P(X \leq 2500) = 1 - \Phi\left(\frac{2500 - 2000}{400}\right) = 1 - \Phi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$(b) P(1600 < X \leq 1900) = \Phi\left(\frac{1900 - 2000}{400}\right) - \Phi\left(\frac{1600 - 2000}{400}\right) = \Phi(-0,25) - \Phi(-1) = 1 - 0,5987 - (1 - 0,8413) = 0,2426$$

$$(c) \text{ Gesucht ist } x_{0,75} \text{ mit } P(X \leq x_{0,75}) = \Phi\left(\frac{x_{0,75} - 2000}{400}\right) = 0,75 \implies \frac{x_{0,75} - 2000}{400} = \Phi^{-1}(0,75) \approx 0,675 \implies x_{0,75} \approx 0,675 \cdot 400 + 2000 = 2270$$

$$(d) \text{ . Gesucht } a > 0 \text{ mit } P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 2\Phi\left(\frac{a}{400}\right) - 1 = 0,95 \implies \Phi\left(\frac{a}{400}\right) = 0,975 \implies \frac{a}{400} = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96 \implies a = 1,96 \cdot 400 = 784$$

Damit gilt $P(2000 - 784 \leq X \leq 2000 + 784) = P(1216 \leq X \leq 2784) = 0,95$