

Lösungen zum 3. Seminar am 15.10.2024

1. Gegeben sind Ereignisse A, B mit $P(A) = 0,72$; $P(A \cap B) = 0,18$; $P(A \cup B) = 0,832$.
Wie groß sind dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(B|\bar{A})$?

LSG.:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,832 - 0,72 + 0,18 = 0,292$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,292} = 0,6164$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,292 - 0,18 = 0,112$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,112}{0,28} = 0,4$$

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Werfen eines Würfels eine Augensumme von mindestens 8 zu erhalten, unter der Bedingung, dass beim ersten Wurf eine 4 gefallen ist.

LSG.:

A... Augensumme mindestens 8

B... Beim ersten Wurf fällt 4

$$P(B) = \frac{1}{6}; P(A \cap B) = P(44; 45; 46) = \frac{3}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{12} = 0,5 = 50\%$$

3. In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte. Die Ergebnisse werden in einer 4-Feldtafel dargestellt.

Gruppe	B erkrankt	\bar{B} gesund	Summe
A geimpft	60	540	600
\bar{A} ungeimpft	120	180	300
Summe	180	720	900

Berechnen Sie:

$$P(A); P(B); P(A \cap B); P(B|A); P(A|\bar{B}); P(\bar{A} \cap B); P(B|\bar{A})$$

LSG.:

$$P(A) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}; P(B) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}; P(A \cap B) = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}; P(B|A) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10};$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}; P(\bar{A} \cap B) = \frac{120}{900}; P(B|\bar{A}) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$$

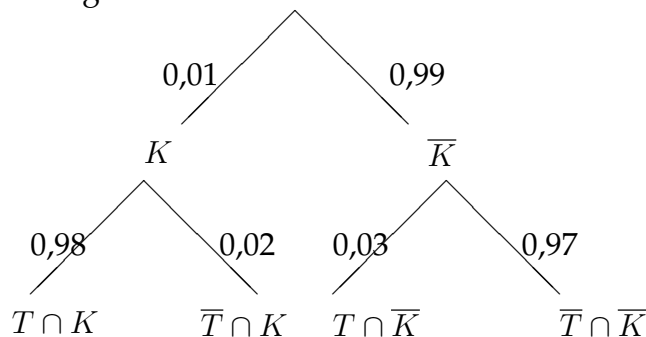
4. In einem Land der Dritten Welt leiden 1% der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei den tatsächlich Erkrankten zu 98% korrekt an. Leider zeigt der Test auch 3% der Gesunden als erkrankt an.

- Zeichnen Sie das Baumdiagramm
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Ergebnis?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine positiv getestete Person auch tatsächlich krank?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als negativ getestete Person gesund?

LSG.:

K...die getestete Person ist krank T... das Testergebnis ist positiv

- Baumdiagramm:



$$(b) P(T) = 0,01 \cdot 0,98 + 0,99 \cdot 0,03 = 0,0098 + 0,0297 = 0,0395 = 3,95\%$$

$$(c) P(K|T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0098}{0,0395} = 0,2481$$

$$(d) P(\bar{K}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{K} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,99 \cdot 0,97}{1 - 0,0395} = \frac{0,9603}{0,9605} = 0,9998$$

5. Die Ereignisse A und B sind jeweils voneinander stochastisch unabhängig. Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in den nachfolgenden Tabellen!

- | | | | |
|-----------|-----|-----------|-----|
| | A | \bar{A} | |
| B | | | 0,2 |
| \bar{B} | | | |
| | 0,7 | | 1 |

- | | | | |
|-----------|-----|-----------|---|
| | A | \bar{A} | |
| B | 0,3 | | |
| \bar{B} | | | |
| | | 0,4 | 1 |

LSG.:

- | | | | |
|-----------|------|-----------|-----|
| | A | \bar{A} | |
| B | 0,14 | 0,06 | 0,2 |
| \bar{B} | 0,56 | 0,24 | 0,8 |
| | 0,7 | 0,3 | 1 |

(b)

	A	\bar{A}	
B	0,3	0,2	0,5
\bar{B}	0,3	0,2	0,5
	0,6	0,4	1

6. Bei einer Untersuchung von 1000 Männern werden die Größe und die Haarfarbe verglichen. Das Ereignis G bedeutet eine Größe von mehr als 1,90m.

Das Ergebnis B bedeutet, dass die ausgewählte Person braune Haare hat.

40% der Männer sind über 1,90m groß, 70% der Männer haben braune Haare. 70% der Männer unter 1,90m haben braune Haare.

Untersuchen Sie, ob die Haarfarbe von der Größe abhängig ist!

LSG.:

$$P(G) = 0,4 \implies P(\bar{G}) = 0,6$$

$$P(B) = 0,7$$

$$P(B|\bar{G}) = 0,7$$

$$P(G \cap B) = P(B) - P(B \cap \bar{G}) = P(B) - P(\bar{G}) \cdot P(B|\bar{G}) = 0,7 - 0,6 \cdot 0,7 = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

$$P(G) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$$

\implies Haarfarbe und Größe sind stochastisch unabhängige Ereignisse