

Lösungen zum 5. AUFGABENBLATT vom 30.10.2024

1. Die von einem Unternehmen hergestellten Glühlampen besitzen eine normalverteilte Lebensdauer mit dem Erwartungswert $\mu = 800$ Stunden und der Standardabweichung $\sigma = 40$ Stunden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der laufenden Produktion gezogene Stichprobe eine durchschnittliche Lebensdauer von weniger als 790 Stunden liefert, wenn
- der Stichprobenumfang $n = 16$ beträgt,
 - der Stichprobenumfang $n = 49$ beträgt.
 - Wie groß muss die Stichprobe sein, wenn die gesuchte Wahrscheinlichkeit 1,5% betragen soll?

LSG.:

\bar{X} berechne die durchschnittliche Lebensdauer der Glühlampen

- (a) $P(\bar{X} < 790)$ bei einem Stichprobenumfang von $n=16$

Lässt sich nur berechnen, da die Grundgesamtheit normalverteilt ist:

\bar{X} ist normalverteilt mit $\mu = 800$ und $\sigma = \frac{40}{\sqrt{16}} = 10$

$$P(\bar{X} < 790) = P(\bar{X} \leq 790) = \Phi\left(\frac{790 - 800}{10}\right) = \Phi(-1) = 0,1587$$

- (b) $P(\bar{X} < 790)$ bei einem Stichprobenumfang von $n=49$

Lässt sich auch berechnen, wenn die Verteilung der Grundgesamtheit unbekannt ist:

\bar{X} ist normalverteilt mit $\mu = 800$ und $\sigma = \frac{40}{\sqrt{49}} = \frac{40}{7}$

$$P(\bar{X} < 790) = P(\bar{X} \leq 790) = \Phi\left(\frac{790 - 800}{\frac{40}{7}}\right) = \Phi(-1,75) = 0,0401$$

- (c) n gesucht, damit $P(\bar{X} < 790) = 0,015$?

Für $n \geq 30$ ist \bar{X} näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 800$ und $\sigma = \frac{40}{\sqrt{n}}$

$$0,015 = P(\bar{X} \leq 790) = \Phi\left(\frac{790 - 800}{\frac{40}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

Aus der Standardnormalverteilung erhält man:

$$-2,17 = -\frac{\sqrt{n}}{4} \implies \sqrt{n} = 4 \cdot 2,17 = 8,68 \implies n = 75,34$$

Die Stichprobe muss mindestens 76 Glühlampen umfassen.

2. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

eine erwartungstreue und konsistente Schätzfunktion für den Parameter μ ist

LSG.:

erwartungstreu:

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

konsistent:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

3. Bezeichne X eine $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ -verteilte Zufallsvariable mit $\sigma_X = 3$. Eine Stichprobe vom Umfang $n=300$ liefert $\bar{x} = 12,3$
Berechnen Sie das 95% Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ_X .

LSG.:

Das Konfidenzintervall für μ ist:

$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right] = \left[12,3 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{300}}; 12,3 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{300}} \right]$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} \approx 1,96$$

$$\begin{aligned} \text{Konfidenzintervall: } & \left[12,3 - 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{300}}; 12,3 + 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{300}} \right] \\ & = [12,3 - 1,96 \cdot 0,173; 12,3 + 1,96 \cdot 0,173] = [11,96; 12,64] \end{aligned}$$

4. Reagenzgläser sollen bezüglich ihrer Schmelztemperatur untersucht werden.
Aus der Tagesproduktion wurden zufällig und unabhängig voneinander 10 Reagenzgläser entnommen. Von diesen 10 Gläsern wurden die Schmelztemperaturen bestimmt. Der Mittelwert dieser 10 Werte ist $\bar{x} = 748,2$ und die empirische Varianz $s^2 = 15,6$. Die zufällige Schmelztemperatur ist normalverteilt.

- (a) Bestimmen Sie ein zentrales Konfidenzintervall für die erwartete Schmelztemperatur beim Konfidenzniveau von 99%.
(b) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau von 95% eine untere Konfidenzschranke für die Varianz der zufälligen Schmelztemperatur.

LSG.:

X misst die Schmelztemperatur; ist normalverteilt

$$\bar{x} = 748,2$$

$$s = 3,95$$

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0,995} = 3,25$$

- (a) Zentrales Konfidenzintervall für die erwartete Schmelztemperatur beim Konfidenzniveau von 99%:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \right] = \left[748,2 - \frac{3,95}{\sqrt{10}} \cdot t_{9;0,995}; 748,2 + \frac{3,95}{\sqrt{10}} \cdot t_{9;0,995} \right] \\ & = [748,2 - 4,06; 748,2 + 4,06] = [744,14; 752,26] \end{aligned}$$

- (b) Untere Konfidenzschranke für die Varianz der zufälligen Schmelztemperatur zum Konfidenzniveau von 95%:

Die untere Konfidenzschranke ergibt sich aus dem einseitigen oberen Konfidenzintervall:

$$n-1=9$$

$$s^2 = 15,6$$

$$\chi^2_{n-1}(1-\alpha) = \chi^2_{9;(0,95)} = 16,92$$

$$\left[\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}, \infty \right) = \left[\frac{9 \cdot 15,6}{16,92}, \infty \right) = [8,3; \infty)$$

Die untere Konfidenzschranke lautet: 8,3