

### Lösungen zum 3. AUFGABENBLATT vom 16.10.2024

1. Bei SMV-TV treten Bildstörungen mit 10% Wahrscheinlichkeit auf. In diesem Fall kommt es dann mit 70% Wahrscheinlichkeit zu Tonstörungen.  
Ist das Bild einwandfrei, so ist mit 95% Wahrscheinlichkeit auch der Ton in Ordnung.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist.  
(b) Untersuchen Sie die Ereignisse  
> Es tritt keine Bildstörung auf < und > Es tritt eine Tonstörung auf <  
auf stochastische Unabhängigkeit.

LSG.:

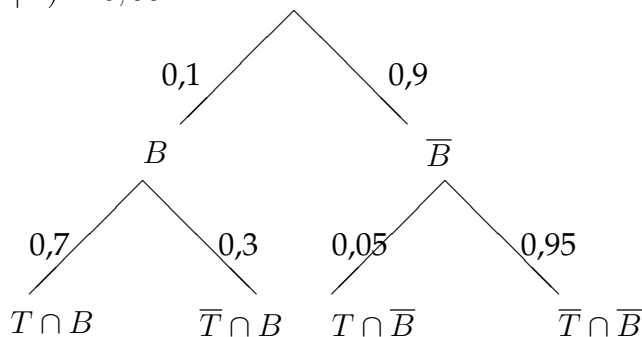
T...Tonstörung

B...Bildstörung

$$P(B) = 0,1$$

$$P(T|B) = 0,7$$

$$P(\bar{T}|\bar{B}) = 0,95$$



- (a) Gesucht  $P(\bar{B}|T)$

$$P(\bar{B}|T) = \frac{P(\bar{B})}{P(T)} \cdot P(T|\bar{B}) = \frac{0,9}{0,1 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,05} \cdot 0,05 = \frac{0,9}{0,07 + 0,045} \cdot 0,05 = 0,39$$

- (b) Sind die Ereignisse  $\bar{B}$  und  $T$  stochastisch unabhängig?

$$P(\bar{B}) = 0,9; P(T) = 0,115;$$

$$P(\bar{B}) \cdot P(T) = 0,9 \cdot 0,115 = 0,1035 \neq 0,045 = P(\bar{B} \cap T)$$

$\Rightarrow \bar{B}$  und  $T$  sind stochastisch abhängig

2. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Personen pro Fahrzeug, die über eine mautpflichtige Brücke fahren, an:

Anzahl der Personen	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,05	0,43	0,27	0,12	0,09	0,04

Die folgenden alternativen Möglichkeiten zur Preisgestaltung werden in Betracht gezogen:

- 0,50 € pro Fahrzeuginsasse

- 0,50 € sowohl für das Fahrzeug als auch den Fahrer und 0,35 € für jeden weiteren Insassen

Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen pro Fahrzeug für jede der beiden Alternativen.

LSG.:

Anzahl n der Personen	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,05	0,43	0,27	0,12	0,09	0,04
P1=0,5n in Euro	0,5	1	1,5	2	2,5	3
P2=1+(n-1)0,35 in Euro	1	1,35	1,7	2,05	2,4	2,75

Erwartete Einnahmen pro Fahrzeug:

$$E(P1) = 0,5 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,43 + 1,5 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,12 + 2,5 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,04 \\ = 1,436$$

$$E(P2) = 1 \cdot 0,05 + 1,35 \cdot 0,43 + 1,7 \cdot 0,27 + 2,05 \cdot 0,12 + 2,4 \cdot 0,09 + 2,75 \cdot 0,04 \\ = 1,6615$$

3. Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot t^{-5} & \text{für } t > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Bestimmen Sie c
- Bestimmen Sie  $P(2 < X < 3)$
- Bestimmen Sie  $E(X)$  und  $\text{Var}(X)$ .

LSG.:

$$(a) \text{ Für die Dichtefunktion muß gelten: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \implies \\ 1 = \int_1^{\infty} c \cdot t^{-5} dt = -\frac{c}{4} [t^{-4}]_1^{\infty} = -\frac{c}{4} (\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-4} - 1) = \frac{c}{4} \implies c = 4$$

$$(b) P(2 < X < 3) = \int_2^3 4t^{-5} dt = [-t^{-4}]_2^3 = 2^{-4} - 3^{-4} \approx 0,05015$$

$$(c) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_1^{\infty} 4t \cdot t^{-5} dt = 4 \int_1^{\infty} t^{-4} dt = -\frac{4}{3} [t^{-3}]_1^{\infty} = -\frac{4}{3} (\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-3} - 1) \\ = \frac{4}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 f(t) dt = \int_1^{\infty} \left(t - \frac{4}{3}\right)^2 4t^{-5} dt = 4 \int_1^{\infty} \left(t^{-3} - \frac{8}{3}t^{-4} + \frac{16}{9}t^{-5}\right) dt \\ = 4 \left[-\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{8}{9}t^{-3} - \frac{16}{9}t^{-4}\right]_1^{\infty} = 4 \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{8}{9}t^{-3} - \frac{16}{9}t^{-4}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{8}{9} - \frac{16}{9}\right)\right) \\ = 4 \cdot \frac{9 - 16 + 8}{18} = \frac{2}{9}.$$

4. Eine Serienproduktion von Transistoren hat einen gleichbleibenden Ausschuss-Anteil von  $p=3\%$ .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von  $n=50$  entnommenen Einheiten

- keine

- (b) genau zwei
- (c) höchstens zwei

fehlerhafte Bauteile sind?

Wie groß sind Erwartungswert und Varianz der Anzahl  $X$  der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe?

LSG.:

$X$ .. Anzahl defekter Transistoren

$n=50, p=0,03$ ;  $X$  ist binomialverteilt.

$$P(X = 0) = \binom{50}{0} 0,03^0 (0,97)^{50} = 0,218$$

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} 0,03^2 (0,97)^{48} = 0,25552$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,218 + 0,3372 + 0,25552 = 0,8107$$

$$E(X) = np = 50 \cdot 0,03 = 1,5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 1,5 \cdot 0,97 = 1,455$$

Mit Python:

```
from scipy.stats import binom
n=50
p=0.03
x1=binom.pmf(0,n,p)
print(x1)

x2=binom.pmf(2,n,p)
print(x2)

x3=binom.cdf(2,n,p)
print(x3)

mean=binom.mean(n,p)
print(mean)

var=binom.var(n,p)
print(var)
```