

## Lösungen zum 6. Seminar am 30.10.2024

1. Eine Maschine verpackt Schrauben. In einer Packung sind 80 Schrauben. Das Gewicht der Schrauben ist annähernd normalverteilt mit dem Mittelwert  $\mu = 4g$  und der Standardabweichung  $\sigma = 0,1g$

Bestimmen Sie für das Nettogewicht  $X$  der Packung die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq 310g)$

LSG.:

Für jede Schraube der Packung gilt:

$X_1, \dots, X_{80}$  ist normalverteilt mit  $\mu = 4g$  und  $\sigma = 0,1g$

Für  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{80}$  gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz,  $X$  ist normalverteilt mit :

$$E(X) = 80 \cdot 4g = 320g \text{ und } \sigma = \sqrt{80 \cdot (0,1g)^2} = \sqrt{80} \cdot 0,1g$$

$$P(X \leq 310g) \approx \Phi\left(\frac{310 - 320}{\sqrt{80} \cdot 0,1}\right) = \phi(-0,89) = 18,67\%$$

2. Die Wartezeit in einem Restaurant ist exponentialverteilt. Es liegt folgende Stichprobe von 10 unabhängig voneinander beobachtete Wartezeiten vor.

$$x_1 = 6,2min \quad x_2 = 1,8min \quad x_3 = 1,5min \quad x_4 = 14,9min \quad x_5 = 4,3min$$

$$x_6 = 4,8min \quad x_7 = 2,4min \quad x_8 = 5,4min \quad x_9 = 5,5min \quad x_{10} = 3,2min$$

(a) Schätzen Sie die erwartete Wartezeit.

(b) Schätzen Sie den Parameter  $\lambda$  der Exponentialverteilung.

LSG.:

(a) Geschätzte erwartete Wartezeit von  $X$ :

$$E(X) = \frac{1}{10} (6,2 + 1,8 + \dots + 3,2) = 5$$

(b) Geschätzter Parameter  $\lambda$  der Exponentialverteilung:

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = 0,2$$

3. Gegeben ist eine Stichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  aus einer normalverteilten Grundgesamtheit. Prüfen Sie, ob die folgenden Schätzer erwartungstreu und konsistent für den Parameter  $\mu$  sind:

- $T_1 = \bar{X}$

- $T_2 = \frac{1}{2} (X_1 + X_n)$

LSG.:

Bekannt:  $X_i$  normalverteilt mit  $E(X_i) = \mu$  und  $Var(X_i) = \sigma^2$

$T$  ist erwartungstreu, falls  $E(T) = \mu$ :

- $E(T_1) = E(\bar{X}) = \mu \implies T_1$  ist erwartungstreu
- $E(T_2) = \frac{1}{2} (E(X_1) + E(X_n)) = \frac{1}{2} \cdot 2\mu = \mu \implies T_2$  ist erwartungstreu

$T$  ist konsistent, falls zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T) = 0$ :

- $\text{Var}(T_1) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T) = 0 \implies T_1$  ist konsistent
- $\text{Var}(T_2) = \frac{1}{4} (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$ .

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_2) = \frac{\sigma^2}{2} \neq 0$  folgt  $T_2$  ist nicht konsistent.

#### 4. Altersverteilung der österreichischen Bevölkerung

Bekannte Parameter der Grundgesamtheit:  $\mu = 37,27$  Jahre und  $\sigma = 22,46$  Jahre

Fragestellung: Wenn Stichproben mit  $n = 1000$  gezogen werden, in welchem Intervall befinden sich 95% der Stichprobenmittelwerte (d. h. Altersdurchschnitte)?

LSG.:

$$\alpha = 0,05 \implies 1 - \alpha = 0,95$$

$$\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$37,27 - z_{0,975} \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}} \leq \bar{x} \leq 37,27 + z_{0,975} \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}}$$

$$35,88 \leq \bar{x} \leq 38,66$$

Der Altersdurchschnitt liegt zwischen 35,88 und 38,66 Jahren für 95% aller Stichproben.

#### 5. Altersverteilung der österreichischen Bevölkerung

Aus einer Stichprobe mit 1000 Personen ergaben sich folgende Größen:

$\bar{x} = 38,11$  Jahre und  $s = 22,46$  Jahre

Fragestellung: In welchem Konfidenzintervall liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% das wahre durchschnittliche Alter der österreichischen Bevölkerung.

LSG.:

$$38,11 - t_{0,975} \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}} \leq \mu \leq 38,11 + t_{0,975} \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}}$$

$$38,11 - 1,9623 \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}} \leq \mu \leq 38,11 + 1,9623 \cdot \frac{22,46}{\sqrt{1000}}$$

$$38,11 - 1,39372 \leq \mu \leq 38,11 + 1,39372$$

$$36,72 \leq \mu \leq 39,50$$

Das Durchschnittsalter der österreichischen Bevölkerung liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 36,72 und 39,50 Jahren.

#### 6. Eine Stichprobe von 64 Knopfbatterien für elektrische Kugelschreiber liefert eine mittlere Lebensdauer von 75 Stunden und eine Standardabweichung von 8 Stunden. Wie groß ist die mittlere Lebensdauer aller Batterien in einer Lieferung von 1500 Stück mindestens? (Konfidenzniveau = 0,90)

LSG.:

Gesucht ist ein einseitiges Vertrauensintervall zum Niveau 0,90 für den Erwartungswert  $\mu$ , der mittleren Lebensdauer aller Batterien.

$n=64$

$\bar{x} = 75$

$s = 8$

Das einseitige Konfidenzintervall ist:

$$\left[ \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty \right) = \left[ 75 - t_{63;0,9} \cdot \frac{8}{8}, \infty \right) = [75 - 1,2951, \infty) = [73.7, \infty)$$

Die mittlere Lebensdauer aller Batterien ist  $\geq 73,7$  mit Konfidenz 0,9