

Lösungen zum 7. Seminar am 06.11.2024

1. An n aufeinanderfolgenden Tagen wird die Niederschlagsmenge in Dornbirn gemessen. Es ergibt sich ein Mittelwert \bar{x} und eine geschätzte Varianz von $s^2 = 100 \text{ mm}^2$.
 - (a) Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die Varianz, wenn $n=10$ ist.
 - (b) Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die Varianz, wenn $n=100$ ist.

LSG.:

- (a) Das 95%-Konfidenzintervall für σ^2 und $n=10$ ist:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \right] = \left[\frac{900}{\chi_{9;0,975}}; \frac{900}{\chi_{9;0,025}} \right]$$

$$\chi_{9;0,975} \approx 19,02$$

$$\chi_{9;0,025} \approx 2,7$$

$$\text{Konfidenzintervall:} = \left[\frac{900}{19,02}; \frac{900}{2,7} \right] = [47,32; 333,33]$$

- (b) Das 95%-Konfidenzintervall für σ^2 und $n=100$ ist:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \right] = \left[\frac{9900}{\chi_{99;0,975}}; \frac{9900}{\chi_{99;0,025}} \right]$$

$$\chi_{99;0,975} \approx 129,6$$

$$\chi_{99;0,025} \approx 74,22$$

$$\text{Konfidenzintervall:} = \left[\frac{9900}{129,6}; \frac{9900}{74,22} \right] = [76,3889; 133,3872]$$

2. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- Die Nullhypothese ist die Vermutung, die man testen möchte.
- Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese wahr ist.
- Wenn das Ergebnis der Stichprobe außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Nullhypothese beibehält, obwohl sie falsch ist.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt.
- Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese falsch ist.

LSG.:

- FALSCH: Die Nullhypothese ist das, was bislang galt

- FALSCH: Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese zugunsten der Gegenhypothese verworfen werden muß .
- RICHTIG: Wenn das Ergebnis der Stichprobe außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.
- FALSCH: Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie eigentlich wahr ist.
- RICHTIG: Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt.
- FALSCH: Das Signifikanzniveau gibt die Irrtumswahrscheinlichkeit an

3. In einem Spielkasino werden Zweifel geäußert, dass ein bestimmter Würfel fair ist, d.h. alle Zahlen gleich häufig auftreten.

Der Spielleiter fordert einen Zweifler auf, ein Signifikanzniveau α zwischen 0,01 und 0,40 anzugeben, zu dem die Hypothese

H_0 , dass der Würfel fair ist,

getestet werden soll. Welches α wird der Zweifler wählen, wenn er möchte, dass der Würfel aus dem Spiel genommen wird?

LSG.:

Je größer das Signifikanzniveau, desto größer der Ablehnungsbereich, desto eher wird auch ein fairer Würfel abgelehnt.

$\Rightarrow \alpha = 0,4$

4. Ein Arbeiter braucht für die Bearbeitung eines Werkstücks im Durchschnitt 7 Minuten (420 sec = μ). Ein Fachmann schlägt, um eine Zeitersparnis zu erreichen ($\mu < 420$), eine andere Bearbeitungsart vor und will die Effektivität seines Vorschlags mithilfe einer Stichprobe vom Umfang $n=16$ testen.

Bestimmen Sie die Hypothesen

Führen Sie den Hypothesentest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ bzw. 0,01 durch.

Dabei sei ferner vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Die Stichprobe ergab folgende Werte: $\bar{x} = 408$ und $s = 25,7$.

LSG.:

X gibt die Bearbeitungszeit eines Werkstücks an

X ist normalverteilt mit $\mu = 7$ und unbekanntem σ

$H_0 : \mu \geq 420$

$H_1 : \mu < 420$

Test vom Umfang $n=16$ ergab: $\bar{x} = 408$ und $s = 25,7$.

Es handelt sich um einen linksseitigen t-Test.

Prüfwert: $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} = \frac{408 - 420}{25,7} \sqrt{16} = -1,8677$

Für $\alpha = 0,05$: Quantil $t_{15;0,95} = 1,753$

Verwerfe H_0 falls $t < -t_{15;0,95}$; $t = -1,8677 < -1,753 = -t_{15;0,95} \Rightarrow H_0$ wird verworfen.

Für $\alpha = 0,01$: Quantil $t_{15;0,99} = 2,6025$

Verwerfe H_0 falls $t < -t_{15;0,959}; t = -1,8677 > -2,6025 = -t_{15;0,99} \implies H_0$ wird nicht verworfen.