

**Lösungen zur Probeklausur - Statistik**

Datum: 06.11.2024

1. (6P) Eine Spedition führt eine Erhebung über das Alter der 300 in ihrem Besitz befindlichen Lastkraftwagen durch. Dabei ergibt sich nachstehende klassifizierte Häufigkeitsverteilung

Alter (in Jahren)	Anzahl der LKW
[0; 0.5)	35
[0.5; 1)	40
[1; 2)	55
[2; 5)	120
[5; 10)	50

- (a) Erstellen Sie ein Histogramm  
 (b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median  
 (c) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung

LSG.:

- (a) (2P)

Alter (in Jahren)	Anzahl der LKW	Klassenmitte
[0; 0.5)	35	0,25
[0.5; 1)	40	0,75
[1; 2)	55	1,5
[2; 5)	120	4
[5; 10)	50	7,5

- (b) (2P) Das arithmetische Mittel beträgt

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{300} \sum_{j=1}^6 \text{Klassenmitte} \cdot \text{Anzahl der LKW} \\ &= \frac{1}{300} (0,25 \cdot 35 + 0,75 \cdot 40 + 1,5 \cdot 55 + 4 \cdot 120 + 7,5 \cdot 50) \\ &= \frac{1}{300} (8,75 + 30 + 82,5 + 420 + 375) = 3,054\end{aligned}$$

Der Median ist

$$Q_{0,5} = \frac{x_{150} + x_{151}}{2} = \frac{2,5 + 2,5}{2} = 2,5 \text{ Tsd Euro}$$

- (c) (2P) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung

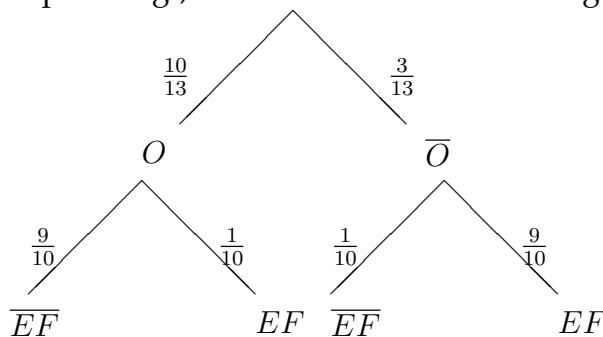
$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{299} ((0,25 - 3,054)^2 \cdot 35 + (0,75 - 3,054)^2 \cdot 40 + (1,5 - 3,054)^2 \cdot 55 + (4 - 3,054)^2 \cdot 120 \\ &\quad + (7,5 - 3,054)^2 \cdot 50) \\ &= \frac{1}{299} (315,84 + 250,8 + 169,21 + 66,78 + 901,43) \\ &= 5,46 \\ s &= 2,34\end{aligned}$$

2. (3P) Skizzieren Sie ein Streudiagramm mit Korrelationskoeffizient  $r=-1$ ,  $s_y = 3$  und  $s_x = 1$   
LSG.:  
Punkte des Streudiagramms auf einer Gerade mit Steigung  $k=-3$
3. (6P) Auf einer Ausstellung sind von 13 Gemälden 10 Originale. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, einen Experten nach dessen Meinung. Dieser gibt im Mittel bei 9 von 10 Werken eine richtige Beurteilung ab. Wenn der Experte entscheidet, dass das Bild eine Fälschung sei, gibt der Besucher das Bild zurück.

- (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum.
- (b) Ein Besucher wählt ein Bild und reicht es dem Experten. Nach der Begutachtung gibt der Käufer das gewählte Bild zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es ein Original?

LSG.:

- (a) Wahrscheinlichkeitsbaum:  
O: Das Gemälde ist ein Original  
EF: Experte sagt, dass das Bild eine Fälschung ist



- (b) gesucht:

$$P(O|EF) = \frac{P(O)}{P(EF)} \cdot P(EF|O) = \frac{\frac{10}{13}}{\frac{10}{13} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{13} \cdot \frac{9}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1 + \frac{27}{10}} = \frac{10}{37} \approx 0,27$$

4. (3P) Die Anzahl der Druckfehler pro Seite ist durchschnittlich  $\lambda = 0.2$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich zwischen 2 (inkl.) und 4 (inkl.) Fehler auf fünf Seiten.

LSG.:

Sei X die Zufallsvariable, die die Druckfehler auf 5 Seiten zählt.

X ist Poisson-verteilt mit  $\lambda = 1$ . Somit ist

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1}{e k!}$$

Die Wahrscheinlichkeit für 2-4 Fehler auf 5 Seiten ist:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{e 2!} + \frac{1}{e 3!} + \frac{1}{e 4!} = \frac{1}{e} \cdot \frac{17}{24} \approx 0,26$$

5. (5P) Die Zeit [in Stunden], die ein Techniker benötigt, um eine Maschine zu reparieren, kann durch die Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda = 3$  beschrieben werden.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Techniker höchstens 45 min für die Reparatur benötigt.  
 (b) Wieviel Minuten braucht der Techniker um 95% der Maschinen zu reparieren?

LSG.:

Sei  $X$  die Zufallsvariable, die die Zeit des Technikers in Stunden misst. Die Verteilungsfunktion von  $X$  lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Gesucht ist:

$$P(X \leq 0,75) = F(0,75) = 1 - e^{-3 \cdot 0,75} = 1 - e^{-2,25} = 0,895$$

- (b) Wieviel Minuten braucht der Techniker um 95% der Maschinen zu reparieren?

Gesucht ist  $x$  mit  $F(x)=0,95$ .

$$0,95 = 1 - e^{-3x} \implies e^{-3x} = 0,05 \implies -3x = \ln(0,05) = -2,996$$

$$x = \frac{2,996}{3} \approx 0,9986$$

$\implies$  Der Techniker benötigt ca. 59,9 Minuten für 95%.

6. (6P) Bei der Produktion von Blechplatten treten Schwankungen des Gewichts auf. Um diese abzuschätzen, werden 10 Platten der laufenden Produktion entnommen und gewogen. Dabei soll das Gewicht in sehr guter Näherung normalverteilt sein. Eine Messung ergibt folgende Werte in kg:

2,81	2,62	2,96	3,03	3,23	3,31	2,82	3,21	2,84	3,20
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) Schätzen Sie Mittelwert und Varianz.  
 (b) Es werde nun vorausgesetzt, dass das Gewicht eines Bleches im Mittel 3 kg bei einer Varianz von  $0,09 \text{ kg}^2$  betrage. Die Gewichte der einzelnen Bleche sind voneinander unabhängig.  
 In welchem Bereich liegt der Stichprobenmittelwert bei einer Stichprobe des Umfangs 100 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%?

LSG.:

- (a) Schätzen Sie Mittelwert und Varianz.

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{10} (2,81 + 2,62 + \dots + 3,2) = 2,903$$

$$\text{Varianz: } s^2 = \frac{1}{9} ((2,81 - \mu)^2 + (2,62 - \mu)^2 + \dots + (3,2 - \mu)^2) = 0,0527$$

- (b) Es werde nun vorausgesetzt, dass das Gewicht eines Bleches im Mittel 3 kg bei einer Varianz von  $0,09 \text{ kg}^2$  betrage. Die Gewichte der einzelnen Bleche sind voneinander unabhängig.

Das Gewicht  $X$  eines Blechs ist normalverteilt mit  $\mu = 3$  und  $\sigma = 0,3$ ,  $n=100$

Es ist  $\alpha = 5\%$  und somit  $z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1,96$ . Somit lautet das Intervall:

$$I = [3 - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; 3 + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [3 - 1,96 \cdot \frac{0,3}{10}; 3 + 1,96 \cdot \frac{0,3}{10}] = [2,9412; 3,0588]$$

7. (6P) Ein Hersteller von Geschirrspülautomaten hat ein neues Modell entwickelt, von dem er behauptet, dass der durchschnittliche Kaltwasserverbrauch unter 40 Litern, bei einer Streuung von weniger als 2 Litern liege

Zum Nachweis dieser Behauptung führt er 41 Probelaufe durch, wobei sich ein mittlerer Kaltwasserverbrauch von 38,5 l ergab. Gehen Sie von einem normalverteilten Wasserverbrauch aus.

Lässt sich die Behauptung bezüglich des Durchschnittsverbrauchs bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  nachweisen?

LSG.:

$X$ : sei der Wasserverbrauch (in l);  $X$  ist normalverteilt mit  $\mu = 40$  und  $\sigma = 2$

- Gauß-Test mit  $n=41$  und  $\sigma = 2$  und  $\bar{x} = 38,5$
- Nullhypothese:  $H_0 : \mu \geq 40$  gegen Alternativhypothese:  $H_1 : \mu < 40$ .
- Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,05$
- Prüfgröße:  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{38,5 - 40}{2} \cdot \sqrt{41} \approx -4,8$
- Das entsprechende Quantil lautet:  
 $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$
- Verwerfe  $H_0$ , falls  $-4,8 < -1,645$ . Daraus folgt  $H_0$  muss verworfen werden