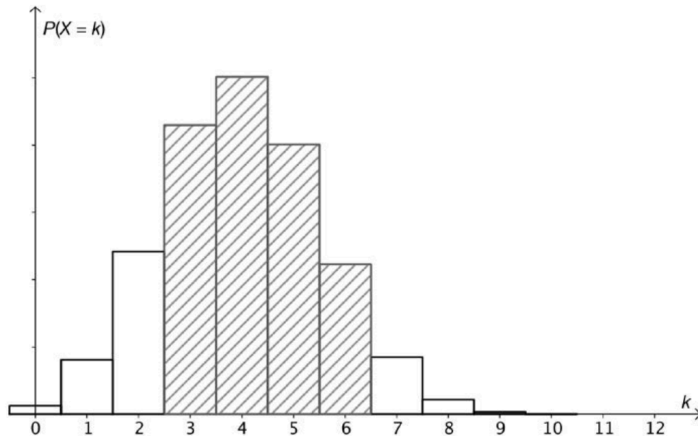


Lösungen zum 4. Seminar am 16.10.2024

1. Die unten stehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X .



Welche Wahrscheinlichkeit entspricht der schraffierten Fläche?

LSG.:

$$P(3 \leq X \leq 6)$$

2. Gegeben ist die diskrete Zufallsvariable X , die die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen kann.

Es sei

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{k(b-k)}{20} & \text{für } k \in \{1; 2; 3; 4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Wie muß b lauten?

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$

LSG.:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 1 &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{(b-1) + 2(b-2) + 3(b-3) + 4(b-4)}{20} \\ &= \frac{10b-30}{20} \implies 10b = 50 \implies b = 5 \end{aligned}$$

(b) Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x < 1 \\ 0,2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 0,8 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$$

3. Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} ct(1-t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie c

(b) Bestimmen Sie $P(X < \frac{1}{2})$

(c) Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

LSG.:

(a) $c=6$

(b) $P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ aus Symmetriegründen.

(c) $E(X) = \frac{1}{2}$ aus Symmetriegründen und $Var(X) = \frac{1}{20}$.

4. Gegeben sei folgende Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x - 0,5 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.

Berechnen Sie für eine Zufallsvariable X , die gemäß $F(x)$ verteilt ist:

$$P(X > 2) \text{ und } P(X = 2)$$

LSG.:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 0,25x^2 - 0,5x + 0,25 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

$$P(X < 2) = 0,75$$

$$P(X = 2) = 0$$

5. Gegeben sei eine Zufallsvariable, die gemäß folgender Verteilungsfunktion verteilt ist:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{14}x^3 + \frac{3}{7} & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert zwischen 0.5 und 1.5 an?

LSG.:

$$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = \frac{61}{112} \approx 0,5446$$

6. Teichenbeschleuniger

Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4%.

Berechnen Sie, wie viele Teilchen des bestimmten Typs im Mittel entstehen, wenn 1000 Kollisionen stattfinden

LSG.:

X gebe die Anzahl entstandener Teilchen bei 1000 Kollisionen an. X ist binomialverteilt mit $n=1000$ und $p=0,034$

gesucht: $E(X) = np = 34$

7. Eine Firma für Bohrmaschinen produziert mit einer Ausschussrate von 0,2.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig gewählten Bohrmaschinen kein Ausschussstück befindet?

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 100 genau 20 Bohrmaschinen zum Ausschuss zählen?

LSG.:

Die Zufallsvariable X zählt die Ausschussstücke. X ist binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,2$

$$P(X = 0) = 2,037 \cdot 10^{-8}\%$$

$$P(X = 20) = 9,9\%$$