

Übungszettel 4

Bis zum 09.11.2024

1. Ein gezinkter sechseitiger Würfel hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } i \in \{1, 2\}, \\ \frac{1}{12} & \text{für } i \in \{3, 4\}, \\ \frac{1}{4} & \text{für } i \in \{5, 6\}. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

(0.5 Punkte)

2. An einer Fertigungsanlage werden 15 Bauteile als Zufallsstichprobe entnommen und gewogen. Die Abweichungen vom Idealgewicht in Gramm werden in der nachstehenden Tabelle dargestellt:

Bauteil i	Abweichung in g
x_1	1
x_2	1.5
x_3	-1
x_4	-2
x_5	-1.5
x_6	0
x_7	3
x_8	10
x_9	-2
x_{10}	-2
x_{11}	-1.5
x_{12}	0
x_{13}	-3
x_{14}	8
x_{15}	6

Berechnen Sie die empirische Varianz s^2 und das arithmetische Mittel der Stichprobe (Anmerkung: s^2 ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2). Anschließend berechnen Sie die Schiefe und die Wölbung der Verteilung. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

(0.5 Punkte)

3. a. Formulieren Sie das Gesetz der großen Zahlen in eigenen Worten.
b. Was kann aus dem Gesetz der großen Zahlen nicht geschlossen werden?
c. Simulieren Sie ein Zufallsexperiment mithilfe eines fairen Würfels und bestimmen Sie so, welche Wahrscheinlichkeit eine "Sechs" zu würfeln hat. (Anmerkung: Simulation ist mit Python oder auch mit einem echten Würfel möglich).
d. In welchen Bereichen hat das Gesetz der großen Zahlen große Bedeutung? Zählen Sie mindestens drei Bereiche auf.

(0.5 Punkte)

4. Angenommen die Lebensdauer von Batterien in Stunden ist eine stetige Zufallsvariable X , die einer Normalverteilung folgt, mit einem Mittelwert $\mu = 50$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 5$ Stunden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie zwischen 45 und 55 Stunden hält? Gesucht ist demnach die Wahrscheinlichkeit $P(45 \leq X \leq 55)$, wobei $X \sim N(50, 5^2)$.

Anmerkung: Verwenden Sie hierfür folgende Tabelle:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Standardnormalverteilungstabelle>.

(0.5 Punkte)