

Exkurs: Mengenlehre

Definitionen I

Menge

Eine Menge beschreibt eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen.

Teilmenge

A heißt Teilmenge von B , falls folgendes gilt:

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B.$$

Leere Menge

Die leere Menge enthält kein Element. Schreibweise: \emptyset .

Definitionen II

Vereinigung zweier Mengen

$$A \cup B :\Leftrightarrow \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Schnitt zweier Menge

$$A \cap B :\Leftrightarrow \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Differenz zweier Mengen

$$A \setminus B :\Leftrightarrow \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Definitionen III

Komplement

$$A^C :\Leftrightarrow \{x : x \notin A\}$$

Symmetrische Differenz von Mengen

$$A \triangle B :\Leftrightarrow \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Gesetzmäßigkeiten I

Sei $A, B, C \subseteq \Omega$, dann gilt:

Assoziativgesetz:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetz:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Kommutativ:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Gesetzmäßigkeiten II

De Morgansche Gesetze

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Absorptionsgesetz

$$(A \cup B) \cap A = A$$

$$(A \cap B) \cup A = A$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundraum oder Ereignisraum Ω

Die Menge Ω der möglichen Ereignisse eines Experiments nennen wir Ereignisraum.

Beispiele:

- ▶ Würfeln mit einem Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Würfeln mit zwei Würfeln:
 $\Omega = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$.
- ▶ Messung der Inflationsrate (in Prozent und ohne Nachkommastellen):
 $\Omega = \{0, 1, 2, 100\}$.
- ▶ Noten im Fach Wahrscheinlichkeit und Statistik: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ereignisse $A \subseteq \Omega$

Ereignisse sind Teilmengen von Ω .

Beispiele für Ereignisse beim Würfeln mit einem Würfel:

- ▶ Ungerade Zahlen: $\{1, 3, 5\}$.
- ▶ Primzahlen: $\{2, 3, 5\}$.
- ▶ Unmögliches Ereignis: \emptyset .
- ▶ Sicheres Ereignis: Ω .
- ▶ Eins: $\{1\}$.

Elementarereignis ω

Ein Elementarereignis ω ist eine einelementige Teilmenge von Ω .

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, welche jedem möglichen Elementarereignis eines Zufallsexperiments einen Wert zuordnet.

Axiomatische Definition (Axiome von Kolmogorow)

Eine Funktion P heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung (oder auch Wahrscheinlichkeitsfunktion), wenn drei Bedingungen erfüllt sind:

- ▶ Nichtnegativität für $A \subseteq \Omega$: $P(A) \geq 0$.
- ▶ Normiertheit: $P(\Omega) = 1$.
- ▶ Additivität für $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung (engl.: probability distribution)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P einer Zufallsvariable ist eine Funktion, welche jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zuweist.

Gleichverteilung (engl.: uniform distribution)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P wird Gleichverteilung genannt, falls es nur endlich viele Ereignisse gibt und alle gleich wahrscheinlich sind. Für alle Ereignisse A gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

.

Beispiele:

- ▶ Wahrscheinlichkeit einer ungeraden Zahl beim Würfeln mit einem Würfel:

$$P(\{1, 3, 5\}) = \frac{|\{1, 3, 5\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}.$$

- ▶ Zweimaliges Würfeln mit einem Würfel ergibt die Summe 5:

$$P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36}.$$

Additionstheorem

Das Additionstheorem besagt für $A, B \subseteq \Omega$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Überprüfe dieses Theorem beim Würfeln mit einem Würfel mit:

- ▶ $P(\{1, 3, 4\} \cup \{2, 6\})$.
- ▶ $P(\{1, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4\})$.

Unmögliches und sicheres Ereignis

Das unmögliche Ereignis tritt nie ein und das sichere Ereignis tritt immer ein. Somit gilt:

$$\begin{aligned}P(\emptyset) &= 0 \\P(\Omega) &= 1.\end{aligned}$$

Für ein Ereignis A gilt mithilfe des Additionstheorems:

$$P(A) + P(A^C) = P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1.$$

Und daher

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

Annahme: Wir wissen, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird und daher sind 1, 3 und 5 als Ausgänge nicht weiter möglich. 2, 4 und 6 sind weiterhin gleichverteilt. Also gilt für $B = \{2, 4, 6\}$:

- ▶ $P(\{1\}|B) = P(\{3\}|B) = P(\{5\}|B) = 0$,
- ▶ $P(\{2\}|B) = P(\{4\}|B) = P(\{6\}|B) = \frac{1}{3}$.

B^C kann aus allen möglichen Ergebnissen entfernt werden, indem wir mit B schneiden. Zum Beispiel erhalten wir für $A = \{3, 4, 5, 6\}$:

- ▶ $A \cap B = \{4, 6\}$,
- ▶ $\Omega \cap B = \{2, 4, 6\}$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B kann demnach wie folgt berechnet werden:

$$P(A|B) = \frac{\# \text{ der noch möglichen Elemente in } A}{\# \text{ der noch möglichen Elemente in } \Omega} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega \cap B|} = \frac{2}{3}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit im Fall einer Gleichverteilung

Im Fall einer Gleichverteilung wird die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wie folgt berechnet:

$$P(A|B) = \frac{\# \text{ der noch möglichen Elemente in } A}{\# \text{ der noch möglichen Elemente in } \Omega} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega \cap B|}.$$

Diese Formel kann auch wie folgt umformuliert werden:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega \cap B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|\Omega \cap B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(\Omega \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (engl.: *conditional probability*)

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wird im allgemeinen Fall wie folgt berechnet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Ereignis A und B sind unabhängig, falls das Folgende gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Falls A und B unabhängig sind und $P(B) \neq 0$ gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Demnach entspricht die bedingte Wahrscheinlichkeit gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit.

Beispiel 1:

- ▶ Wir würfeln mit einem Würfel. Sind die Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ unabhängig?
- ▶ $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- ▶ $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- ▶ **Lösung:** Die Ereignisse sind abhängig.

Beispiel 2:

- ▶ Wir würfeln zweimal mit einem Würfel. Sind die Ereignisse $A = \{(1, 1), \dots, (1, 5), (1, 6)\}$ (Eins bei 1. Wurf) und $B = \{(1, 1), \dots, (5, 1), (6, 1)\}$ (Eins bei 2. Wurf) unabhängig?
- ▶ $P(A \cap B) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$.
- ▶ $P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$.
- ▶ **Lösung:** Die Ereignisse sind unabhängig.

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A)P(B|A),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(A \cap B)} = P(A)P(B|A)P(C|(A \cap B)).$$

Mithilfe des Distributivgesetzes kann das Folgende hergeleitet werden:

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup B^C)) \\ &= P((A \cap B) \cup (A \cap B^C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \\ &= P(B)P(A|B) + P(B^C)P(A|B^C). \end{aligned}$$

Satz von Bayes

Der Satz von Bayes für $B \cup B^C = \Omega$ lautet:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)P(A|B) + P(B^C)P(A|B^C)} \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B^C)P(A|B^C)}. \end{aligned}$$

Falls B_1, \dots, B_n paarweise disjunkt und $\cup_i B_i = \Omega$, dann gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i \cap A)}{P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)} \\ &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)}. \end{aligned}$$

Diskrete Zufallsvariable

Eine diskrete Zufallsvariable X nimmt nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte x_1, x_2, \dots, x_n an.

Anmerkung: Eine Menge wird abzählbar unendlich genannt, falls sie zur Menge \mathbb{N} gleichmächtig ist. Primzahlen sind zum Beispiel abzählbar unendlich, da sie eine Teilmenge von \mathbb{N} sind. \mathbb{R} hingegen ist überabzählbar.

Stetige Zufallsvariable

Eine stetige Zufallsvariable nimmt unendlich viele, nicht abzählbare Werte an.

Wahrscheinlichkeitsverteilung (pdf) einer diskreten Zufallsvariable

Die diskrete Zufallsvariable X kann Werte x_1, \dots, x_n annehmen. Der Wert x_i , zu welchem das Ereignis $X = x_i$ gehört, tritt mit Wahrscheinlichkeit

$$p_i = P(X = x_i)$$

ein. Die möglichen Realisierungen x_i gemeinsam mit den Wahrscheinlichkeiten p_i nennen wir **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (pdf) oder **Verteilung** der Zufallsvariable X .

Beispiele:

- ▶ Einmaliges Werfen eines fairen Würfels: $(x_1, p_1) = (1, \frac{1}{6})$, ..., $(x_6, p_6) = (6, \frac{1}{6})$.
- ▶ Einmaliges Werfen einer fairen Münze: $(x_1, p_1) = (\text{Kopf}, \frac{1}{2})$, $(x_2, p_2) = (\text{Zahl}, \frac{1}{2})$.

Kumulative Verteilungsfunktion (cdf) einer diskreten Zufallsvariable

Die diskrete Zufallsvariable X kann Werte x_1, \dots, x_n annehmen. Wir nennen für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} p_i$$

kumulative Verteilungsfunktion (cdf) der Zufallsvariable X .

Zusammenhang pdf und cdf am Beispiel eines fairen Würfels

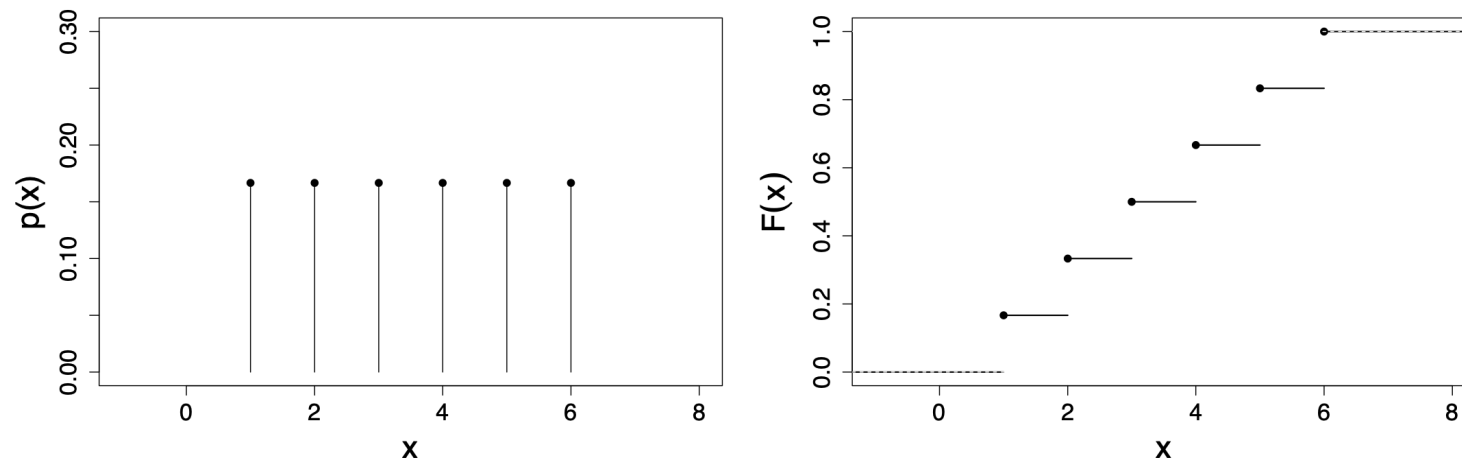


Abb.: Links die pdf und rechts die cdf.

Anmerkung: Die kumulative Verteilungsfunktion hat für eine diskrete Zufallsvariable X immer die Form einer Treppenfunktion.